**СПРАВОЧНИК**

С **ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ**

В этой книжке мы старались писать о практической мате- матике и ее бытовых применениях. При этом мы не доказыва- ли теорем и не объясняли подробно тот или иной вывод. Вез- де, где требовались знания математических фактов, мы отсылали читателя сюда — в справочник.

Справочник нужен для того, чтобы кратко представить факты школьной математики, дать один-два примера и одно- два упражнения. Нет цели включить в справочник абсолютно все правила, формулы и теоремы. Мы руководствовались принципом полезности в решении задач. Если какой-то факт встречается в задачах, в частности заданий ЕРІЭ, то мы стара- лись про него не забыть. іЗато здесь есть некоторое формулы, утверждения и даже методы решения задач, которых нет в учебниках.

## Арифметика и алгебра

Натуральные числа

**Четвые** натуральные числа делится на 2. Их легко узнать по последней цифре. Она должна быть 0, 2, 4, 6 или 8. Напри- мер, **124** — число четное, а **237** — нечетное.

Задача 254. Какие из чисел 2153, 5326, 7464 и 3529 четные, а какие — нечетные?

**Признак делимости ва** 3 и ва 9. Если сумма цифр числа делится на 3, то само число также делится на 3. То же самое с делителем 9: если сумма цифр делится на 9, то и само число делится на 9.

*П puмep.* Число **6753** делится на 3, поскольку сумма его цифр 6 + 7 + 5 + 3 = 21 делится на 3. 21 не делится на 9, значит, число 6753 также не делится на 9.

Перед сложением можно вычеркнуть цифры 0, 3, 6 и 9, ec- ли они встречаются в числе. Тогда придется складмвать мевьше цифр. Если сумма получается большой, можно

снова складывать цифры и т.д., пока не станет очевидно, делится ли сумма на 3 (или на 9) или нет.

*Мривер.* Делится ли на 9 число 67042296345623432? Сна-

чала вычеркнем «ненужные цифры» 0, 3, 6 и 9:

742245242.

Сложим оставтиеся цифры:

7 + 4 + 2 + 2 + 4 + 5 + 2 + 4 + 2 = 32.

На 9 не делится. Пначит, и данное число не делится на 9.

Задача 255. Делится ли на 3 и на 9 число

2747682421015892306?

Простые н составвые числа. Любое натуральное число, большее единицы, — либо простое, либо составное. Простое число делится только на себя и на 1. Например, 2, 3, 7, 11 или

29. Все простые числа, кроме числа 2, — нечетные. Составное число является произведением нескольких простых. Напри-

мер, 1-2 =- 2 2 3.

*Мривер.* Число 653 простое. Чтобы убедиться в этом, при- дется проверить, делится ли оно на простые числа или нет. К счастью, проверять нужно только до простого числа, не

превосходящего 6353, то есть до числа 23.

На 2 и ва 5 не делится (оканчивается цифрой 3). На 3 не

делится (сумма цифр 14). Проверку делимости на 7, 11, 13,

17, 19 и 23 можно провести непосредственно делением с остатком. Убедившись, что все эти числа не являются де- лителями числа 653, делаем вывод: число 653 — простое.

Задача 256. Являются простыми или составными числа 457, 801, 5231, 5409, 473? Для составных чисел укажите раз- ложение на простые.

НОД (ваибольтий обтций депитель). Например, числа 24 и бО имеют НОД 12, поскольку оба они делятся на 12 и нет об- щего делителя, большего, чем 12. Чтобы найти НОД двух чи- сел, можно разложить их на простые множители и выбрать общие простые:

2-4 =- 2

2 2 - 3, 6-0 =- 2 2

3 5.

Пначит, НОД состоит из множителей 2, 2 и- 3 : 2 2 3 = 12.

Умение находить НОД полезно при сокращении дробей.

###### 17з

**HOK (ваимевьюее** обтqее кратвое). Например, чиела 24 и 60 имеют HOK **120, поскольку 120** делится и на 24, и на 60 и это наименьшее такое натуральное чиело. Чтобы найти HOK двух чиеел, можно разложить их на простые множители и добавить к одному из чиеел недостающие множители второго числа:

24 = 2- 2 - 2 3, 60 = -2 2- 3 5.

В разложении чиела 24 не хватает простого множителя 5,

который есть у 60. Значит, HOK чиеел 24 и 60 равен 24 - 5 — **120.**

Умение находить HOK полезно при сложении и вычитании дробей.

Между НОД и HOK чиеел о и 6 еущеетвует евязь:

# нод («, s-j нок(«, s»«s.

Задача **257.** Найдите HOK и НОД чиеел **252** и 84.

##### Дробн

Обыквовеввая дробь — отношение двух целых чиеел. 3a-

пиеываетея — . Чиело m — **числитель.** Чиело п — звамева-

**тель.** Знаменатель считают положительным, то есть нату- ральным. Если числитель отрицателен, то знак минуе обычно

запиеывают перед дробью. Например, пишут —4 , а не 4 , xo-

тя это одно и то же.

**Связь между дробями и делением.** Дробь следует понимать как результат деления числителя на знаменатель. Поэтому любое целое число можно представить в виде дроби многими

способами. Например, 2 можно записать как

4 или как —10 .

2 s

**Сокращение дробей.** Чиелитель и знаменатель дроби мож- но разделить (или умножить) на одно и то же ненулевое число. При этом значение не изменится. Самое большое натуральное чиело, на которое можно сократить дробь, — НОД числителя и знаменателя.

*Hanpu:хер,* у дроби 8

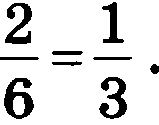
24

и чиелитель, и знаменатєль делится

яа 4. Можно сократить эту дробь на 4:

8 \_2

24 6

МОжво **сокраТиТь** еще На 2:

Задача258.СохраТиТедроби

36 143 372

162 1001 671

**Умвожевие дробей.** ЧТобы уМНожиТь одНу дробь на дру- гую, нужно умножиТь друг на друга их числиТели и — OT- дельно — онаМенаТели.

*Например,*

Т 8 56

**Иногда** В ходе уМножения дроби удается **сокраТиТh:**

3 14 \_ 3-34’ \_Д 2 \_ 6

Т 19 / -19 1 19 19

Задача259.ВызислиТе:

5 7 . 32 65 1

21 25 13 72 5

**Взаимно обратвые дроби получаlОТСя** друг из друга «пepe-

ВО}ШчиваниеМ» . НаприМер, дрОби и — В38НМНО

Произведение взаиМнО Обратн£›Іх дробей равно 1:

\_ 21 \_ i

7 3 21

обраТны.

Делевие дробей. ЧТОбы разделиТь какое-То число на дробь, нужно это число умножить на дробь, обраТную делителю. ВмесТо

тогО чТОбьІ **делиТь, скажем,** На 2 , нужно умножиТь на

#### 2

*М ример.* 4 28 4 39 4 -39 " 13 13

87 39 87' 28 87 28 . ’ 29 7 203

Raдa•ia 260. Вычислите:

5 3 14 . 49

#### 12 “ 16 9 " 12 “

Cnomeaue u **anmuzaaue qpo6eii. Ecus** y ppo6eii axaue aTen op uaaoanie, To rips cnomeii ii cxnapniaaioTco zonsxo u cn ze- n . Ecus oiiaueiiarenii pastime, uy tiio po6 z£CII TOro, uzo6ai oxe czanii opiiua«oaaiuii. B xaueczae o6 ero **aiiaueiiaTenn uilCTO** iicnonsoyioT HOK. Tax xte nocrynax›z **npu asiuiiTax** .

’ 1Т5

*Примеры.*

Случай одинаковых знаменателей:

#### 5+ 4 \_ 9 \_ i

9 9 9 9

Случай разных знаменателей. Вычислим 1

менателей равен 15. С помощью дополнительных множи- телей получаем:

###### 2+ 1 \_ 2 -3 1-5 6+ 5 \_ 11

5 3" 5-3” 3 -5" 15 15" 15

Обычно пишут короче, объединяя два действия:

2+ 1 \_ 2 3 +1 5 \_ 11

s з is is

Задаяа 261. Вьгчислите:

45 — 23 + 13 

###### T6 T6 T6 Т 3 21 14

**Неправильвые и смешавные** дроби. У неправильной дроби числитель больше или равен знаменателю. Если так, то мож- но выделить в;елую часть, получив смеюаввую дробь. Напри- мер, 17 при делении на 5 дает 3 и 2 в остатке. Поэтому

1s + 2 . Обычно записывают без знака ‹плюс•› : 2

s s s s

Зада•іа 262. а) Напишите неправильную дробь 6 в виде сме-

**б)запититесметаннуюдробь2** е неправильной.

**Десятнчвая дробь (ковечвая)** — дробь со знаменателем 10,

**100, 1000** и т.д. Папись десятичных дробей особая — без дроб-

**НОЙ Ч£І]ЗТЬІ,** НО СО С **П£ІЦИ ilJIbH** Ы М **i3HIIKOM (ЗПНІІТОЙ , КОТО]ЗhІЙ OT-**

деляет целую часть от дробной. Например, запись 3,47 озна-

чает 3 47 или 347

100 100

Перевод **обьшвовеввых дробей в десяти•івые. Обыкновен-** ную дробь можно записать в виде десятичной дроби, только если знаменатель обыкновенной дроби (после сокращение) не содержит никаких простых множителей, кроме 2 и 5.

*Например,* $ . 50 = -2 5 5 . Перевод возможен: = 0,14 .

*Дpyгoй пример.* J 2 . Знаменатель 12 содержит простой множитель 3. Перевод вевозможен (хотя 12 можно запи-

сатъ в виде бесиовечвой десятиявой дроби).

**Задаяа 263.** Переведите, если возможно, обыкновенные дроби

в десятичные:

3 7 67 31 13

4 15 25 20 60

Иррациональные числа

Дроби, в том числе десятичные, выражают частное или от- ношение двух целых. Отношение по-латыни *ratio.* Отсюда на- звание для дробных чисел — рациовальвые. Числа, которые не удается записать с помощью дробей, называют иррав;ио-

нальными. Примеры: 32 , 33 , к, sinl° .

Докажем, что число иррационально. Будем рассуждать от противного. Предположим, что — рациональное число. Тогда 2 можно записать

несократимой дробью: 2 (числа m и л целые и взаимно простые).

Следовательно, лу m. Возведем равенство в квадрат: 2л' m' . Левая часть делится на 2. Значит, правая тоже делится на два. Поэтому число m — четное: *т 2k .* Получаем: *2п 2 = (2k) ——* 4/г' .

Разделим обе части равенства пополам: *n2 = 2k 2 .* Теперь правая часть де-

лится на 2. Значит, левая тоже делится на 2, и поэтому число л — четное.

Следовательно, у дроби — числитель и знаменатель — четные числа.

Дробь можно сократить на 2. Мы пришли к противоречию с предположени- ем, что дробь несократимая. Утверждение доказано: число не яв-

ляется рациональным.

#### Степени и корни

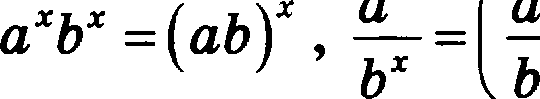
Степень — довольно каоризная вещь. В зависимости от ооказателя основание может или ве может быть отрицатель- яым. Чтобы не вдаватьея в подробности, мы еформулируем общие евойства етепеней, предполагая, что все указавные степени имеют смысл. Так же поступим и с корвями.

Произведение и иаствое степевей с однваковьг оевовавием:

Степень в степвви: $о‘ )' = о .

Произведение и частвое степевей с одиваковьтм показате-

лем:



**Нулевая степень: о°** = 1. Иногда удобво полагать 0° = 1 (и для **отого есть основания), но обычно считается, что степень 0°** ве имеет смысла (и ото тоже яе без **причив).**

Обратное число. Число 1

—

МОЖНО ПВЯИСВТЬ

етепеаью:



Отск›да получается, что о“ = — .

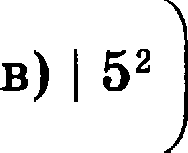
*Примеры.* Упростим следующие выражения, насколько

ВОЗМО)МНО.

н) 8° -82 = 8 ” i

i2

6) = о" = $' •

$6

— - 6



= 5' **=125** •

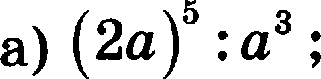
###### 1Т8

= 2 4“ = 2" = 1 \_¿

2 8

**Задаяа 264. Упростите** следующие выражения, насколько

ВОЗМОШН О:



6) 74 - 7”' ;

в) 8' 2' ;

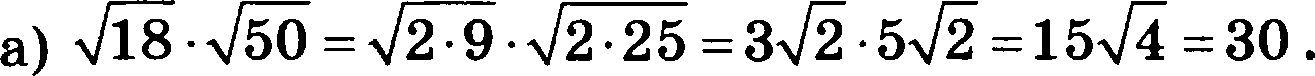
г) 4" : 16 ' 0, 252 .

###### Квадратный корень (арифметический).

Свойства квадратного корня

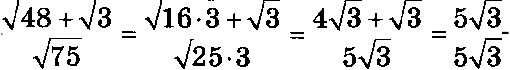


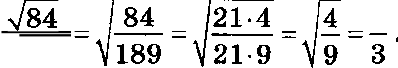
*При:меры.* Упростим следующие выражения, насколько

ЭТОВОЗМООМНО.

6) При о < 5 (о —7) = је —7 = 7 — а , поскольку при а < 5 выражение 7 — а положительно.

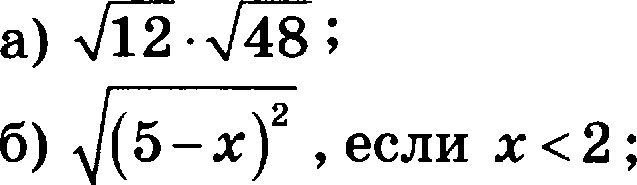
в) ІІри о > 13 (а — 9) = ја —9 — о — 9, поскольку если о > 13 , то о — 9 > 0 .

= 1 .

84 21-4 4 2

1389

**Задача 265.** Упростите следующие выражения, насколько это

ВОЗМОХІНО.

в) (5 —3 )2 , если z > 7 ;



' **1312**

#### Формуям сопращенного умноженнп

Іtвалрат суммы и развостн:

*ја+ b)’ — а’ +*2оЬ+ *b’ , а — b)’ ——а’ — 2аЬ+ b’ .*

Развость квадратов*°*:*' \_ z ——(а—ь)(а + ь) .*

*Привер.* Упростить выражение '

s+2 ’— ii—2

4o

Первыи способ. Применим формулы квадрата суммы и квадрата разности:

4a 4o 4o

Второй епоооб. Применим формулу разноети квадратов в чиелителе:

s+2 '— ii—2 (о+2— о+ 2)(o +2+ о—2) 4 2o =2.

4a 4o 4o

*Привер.* Упростим выражение: (sin z + cosz)' —1 . Преобразуем:

(sin z + cosz)’ —1= sin’ т + 2sin тсоsт + cos’ т —1 =

= $sin' z + cos' т$ —1+ sin 2т = 1—1+ sin 2z = sin 2z.

Помимо формулы квадрата суммы при преобразовании мы воспользовались основиым тригонометрииеским тождест- вом и формулой синуса двойного аргумента.

Задаяа **266. Возведите** в квадрат по формуле: (z + 4)'; (2o — 3)'.

Задача 267. Упростите выражение *2b’ — 2аЬ*

**Задача 268. Упростите** выражение (cosz — ето)' + sin2z.

Логарнфмы

Логарифм. Если о‘ = с, то о называют оенованием, а *b —*

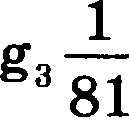
показателем степени или логарифмом. По сути, + логарифм» и

+показатель степени• — еиноиимы. Baжuo подчерквуть, ка- кое основание и что получается в результате. Поэтому говорят

‹логарифм числа с по основавию о› и пишут log с = 6 .

**Нужно помнить, что оеяовавие** о и аргумент с положи- тельные числа. Кроме того, о z 1.

*М римерьt. в) log* 8 = 3, поскольку 2' = 8,

6) lo

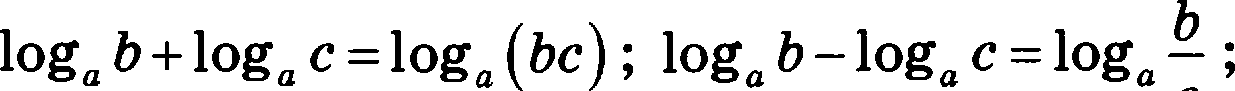
= —4 , поскольку 3-4\_ 1

81

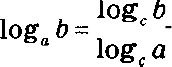
Задача 269. Вьгчислите:

log 16; log 25; log 6; Iog«,s $125 е

5

Свойства логарифмов вьlтекают из евойетв етепеней. Наи- более употребительные евойетва:

log *b’* ——blog *b .*

 — переход к новому основанию с.

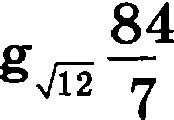
Если в логарифме log *b* перейти к основанию *b,* получится

1

lOg, *b——*

*Мримерьt.*

а) log 2+ log 3= log 6 =1 ;

6) log 84 — log 7 — lo

= log 12 — 2 .

в) Вычислить log , о‘ , если log, *b -—* 7 . Преобразуем выра-

жение: log , о' = 6log , о = 6 log, о= 6 1 \_ 6 \_ 6

IOg *b* 5 7 35

Задаяа 270. Вьюислите: loф$g 3 +1oф$g 6 ; log 48 — 4log, 2 .

Задаиа 271. Найдите значение log . • 4 , если log, т=0,1 .

**Натуральвый логарифм.** Логарифм по основаниіо *е ==* 2, 72 называют **яатуральяым логарифмом. Обозначают его** In вме- сто log и **освовавие ве питут.**

Уравнения

Ливейвое ураввевие или уравнение оервой степени:

oz + b = 0

имеет единственныи корень z = ——*ь* .

Замечание. Разумеется, о z 0 .

*М римерьt. в)* Решим уравнение 4z — 7 = 0.

Получаем: 4z = 7; z = т

4

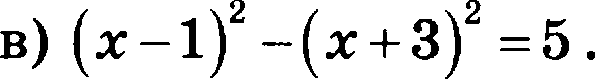
6) Ретим уравнение 2z + 3(1 — z) = z + 4. Раскроем скобки и приведем подобные:

2z + 3 — 3z = z + 4; 2z — 3z — z = 4 —3; —2z = 1; z = 1

2

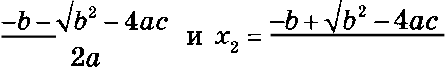
Зада•іа 272. Решите уравнения: а) 3 — 8z = 0 ;

6) **2(3z —1)** — **3(2z** + 5) = 4z —7 ;



**Іtвадратвое ураввеиие** или ураввение второй степени: oz' + *bx+ с=* 0 .

Коэффициенты — любые числа, но только о z 0 . Уравнение имеет два корня.

2s

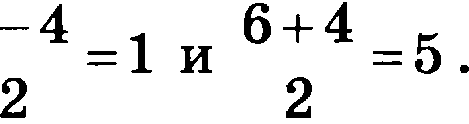
Если дискриминант *b2* — 4ас положителен, то корни z, и т различны.

Если дискриминант равен нулю, то корни совпадают, хотя их по-прежнему два (так думают математики — странные люди).

Если дискриминант отрицателен, то корни не являются действительными числами (обычно говорят, что корней в этом случае нет).

*Мривер.* Решим уравнение z' — 6z + 5 = 0 . Дискримивант

равен 6- 2 — 4 5 = 16.

Следовательно, корни равны 6

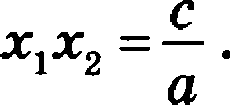
*Ответ:* 1; 5.

##### Задача27З.Решитеуріюнеаил:

а) z' + 7z —18 = 0 ;

6) 3z' —z —14 = 0 ;

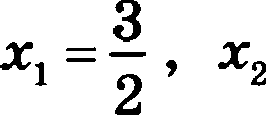
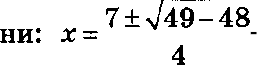
в) (z + 2)' +(z —3)' = 17 .

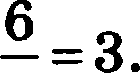
**Сумма корней: z,** + z, = —— ; **произведение корней: ** Эти два равенства называют теоремой Виета. Верна также o6- ратная теорема: еели числа z, и z, удовлетворяют равенствам

z, + z = —— и **z,z** = — , то оти чиела являются корнями квад-

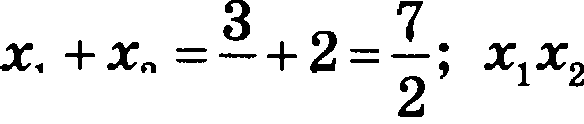
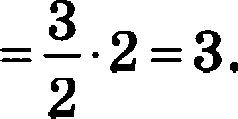
ратного ураввения oн' + 6z + с = 0. Теорему Виета удобно ис- пользовать для проверки при решении уравнений.

*М рижер.* Решим уравнение: 2z' — 7z + 6 = 0 .

**Найденхор** , то есть =2. Мо

теореме Виета сумма корней 2 , а произведение 2

Слошиниунлоякиндругнадруzанайденныехорни:

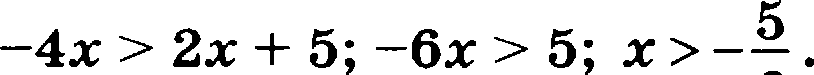
2 

Уравнение pemeнo верно.

Неравенства

Ливейвое веравевство.

Пример. 3z + 7 > 0; 3z > — 7 ; z > — .



Заметьте, что последнее действие — деление яа коэффици-

eTlт при z. Если ов отрицателен, то звак веравевства меняется.

Зада•ів 274. Ретите иеравеяетво:

а) 5z — 7 » 3;

###### 6) 4(z + 2) < 5z — 1.

**Іtвадратвое веравевство.** Решим неравенство z 2 4 . Вот распространенная ошибка: школьник действует «по анало- гии» с уравнением: т +2 . Это ерунда.

Мы уже отмечали, что т = +2 на самом деле не равенство, а сокращенная запись двух равевств т = —2 и т = 2. Что же тогда значит т +2 ? Ничего не значит. Бессмыслица.

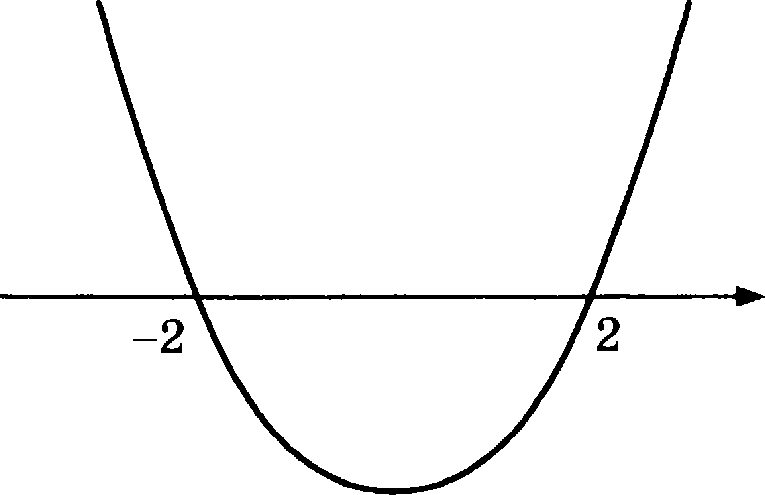
Решением квадратного неравенства являются промежут- ки, границами которых служат корни соответствующего уравнения. Правильное решение выглядит иначе.

*Решение.* 8апишем неравенство т 2 4 в виде т 2 —4 0 .

Корни уравнения т 2 —4 = 0 равны —2 и 2.

Неравенство т 2 4 выполняется при т —2 и при т 2, а при —2 < т < 2 неравенство не выполняется. ІЗначит, отве- том служат промежутки (—m;— 2 и 2;+ m) .

Смысл легко понять, если сделать набросок графика функции у = т 2 — 4 . При этом не обязательно указывать ось

ординат, ноль, соблюдать масштаб и т.п. Повторяем: рису- нок очень схематичен, но достаточен для того, чтобы уви- деть, где располагаются решения.

Так же решаются все прочие квадратные неравенства.

1. Нужно привести неравенство к удобному виду (начинается с т 2, а в правой части 0). Помним, что если приходится ум- ножать обе части на отрицательное число, неравенство ме- няет анак.
2. Реюаем соответствующее ураввение.
3. С помощью схемы графика находим промежутки решения.

**Метод ивтервалов.** Этoт метод является обобщением опи- санного выше способа решения квадратного неравенства. Он

позволяет решать самые разнъіе неравенства, часто даже неза- висимо от того, как они устроены. Приведи неравенство к удобному виду (справа 0), нужно решить одно или два соот- ветствующих уравнения, а затем сделать схематичный набро- сок поведения функции в левой части. При отом это даже не набросок графика — ото просто схема, позволяющая видеть, выше или ниже нуля проходит этот график.

*Привер 1.* Решим неравенство

2х 2 —5x —7

32 — 3

Сначала упростим неравенство, избавившись от знамена- теля. Для этого домножим обе части неравенства на 32 —3 . При этом неравенство поменяет знак на противополож- ный, поскольку 2 — 3 < 0 :

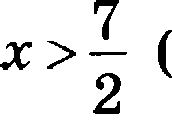
2z’ — 5z — 7 < 0 ; (z -r1)(2z —7) < 0 .

Корни уравнения (т +1)(2z — 7) = 0 равны —1 и 2 . Неравен-

ство выполняется при — 1 < т <—

###### 2

и не выполняется при

оба множителя больше нуля) и т —1 (оба множите- ля меньше нуля). Это видно на схеме

—1

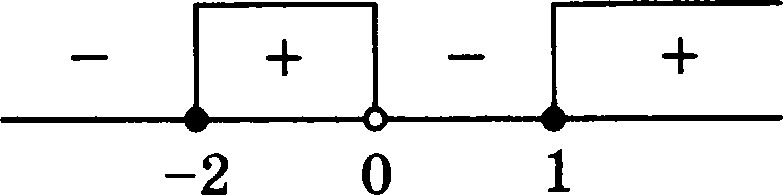
2

*М ривер 2.* Решим неравенство z + l—2 0 .

Преобразуем неравенство, приведи левую часть к общему знаменателю: + 2 0 .

Корни уравнения z 2 + т — 2 = 0 равны —2 и 1. Знаменатель равен 0 при т = 0. Воспользуемся методом интервалов, чтобы определить, на каких интервалах выражение будет больше нуля.

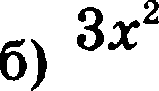
Знаки на каждом интервале найдем подсчетом. Решение видно на схеме.



Точки —2, 1, 0 проверяем отдельно. Точки —2 и 1 также яв- ляются решениями, а точка 0 — нет.

*Ответ:* — 2 т < 0 и т 1 .

Задаяа 275. Решите неравенства:

z° —5x +6

2—339

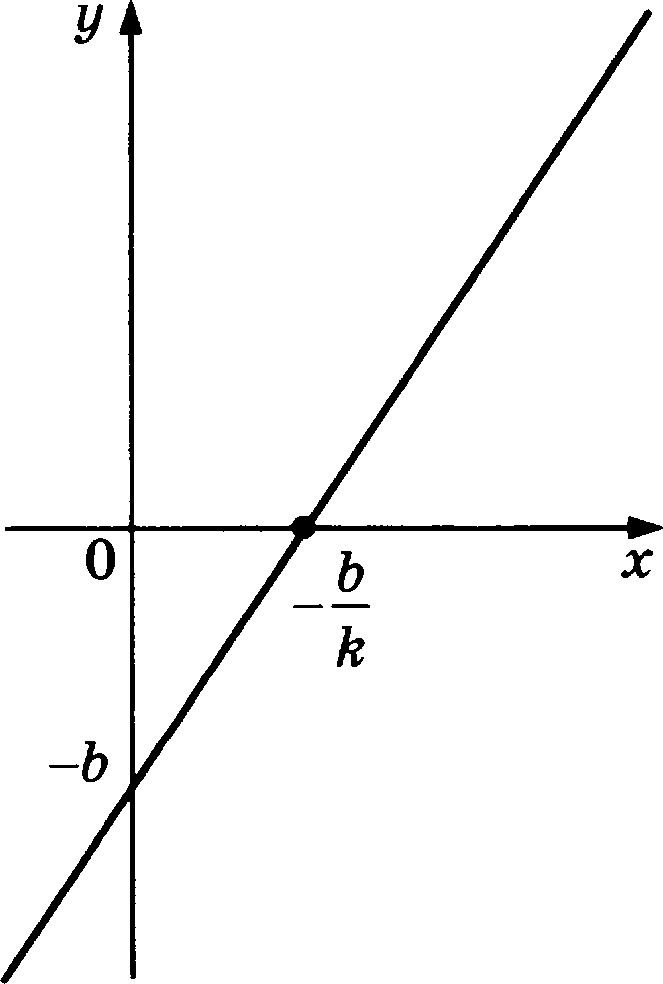
+2m —5< o m+2

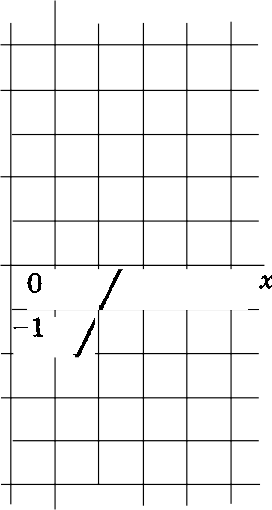
**Функции** и графипи

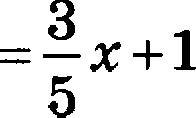
##### Ливейвая фувкция

Формула у = Ьт + b .

**Ррафик** — прямая линия (не вертикальная). Тангенс на- клона графика к оси абсв;исс **равен угловому коэффив;иенту Ь.** Ось ордиват график пересекает в **точке (0;** b).

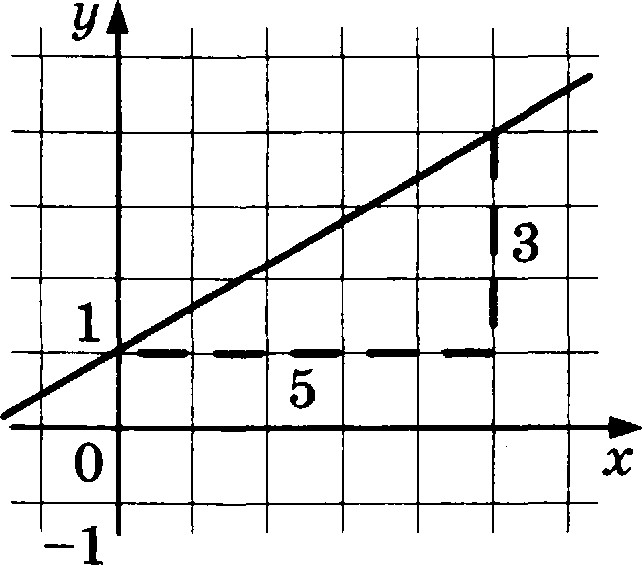


*При:чер 1.* График функции у = 2z — 3. Ррафик проходит черео точку (0; —3) на оси ординат и имеет угловой коэф- фициент 2.

*II ри:чер 2.* График функции у  . График проходит

черео точку (0; 1) на оеи ординат и имеет угловой коэффи- циент — . Строить его удобно следующим образом: от точки

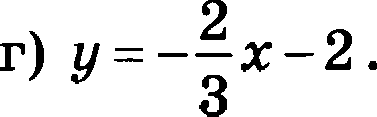
(0; 1) построим вепомогательный треугольник е катетами 5 и 3 (нужно учееть, что угловой коэффициент положителен, поэтому функции воорастает).

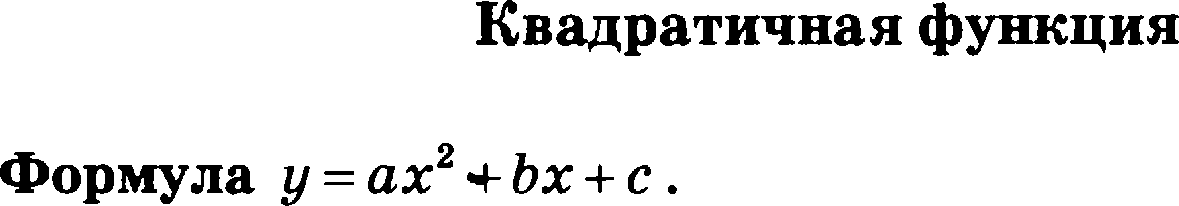


Получается точка (5; 4). Теперь проведем прямую через ве найденные точки.

Задвчв 276. Постройте графики фувкций:

###### 2

6) у = 4 — **3z;**



Ррафик — парабола. Ветви параболы направлены вверх или вниз в зависимости от знака старшего коэффициента о .

Верілина **параболы** имеет координаты

*D ——д2* —4ое — дискриминант.

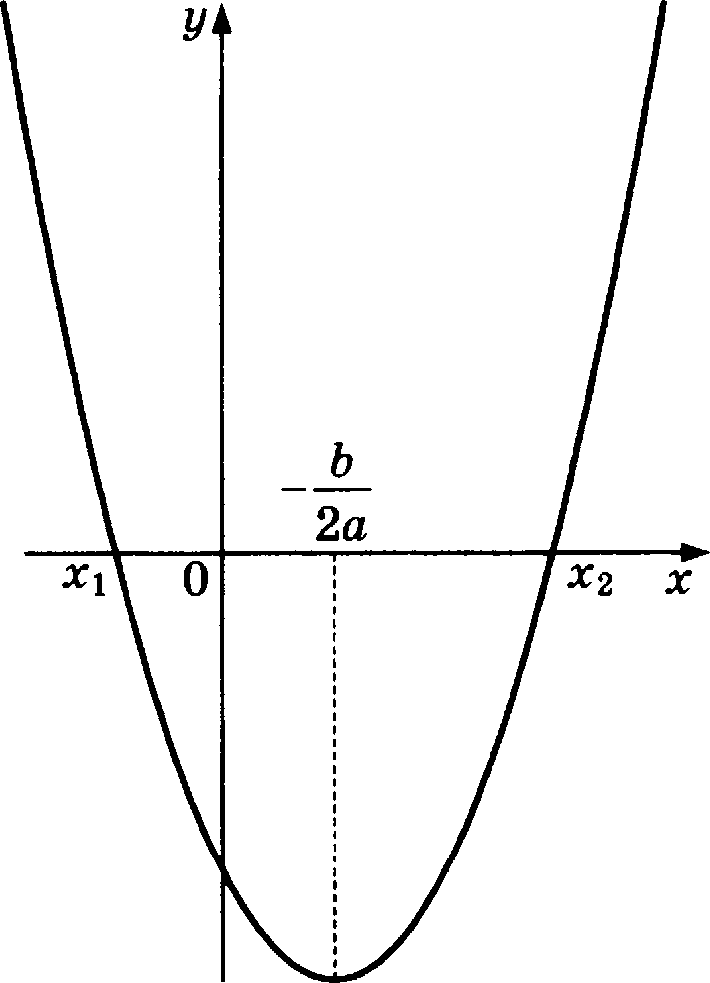
*b . D*

2o" 4o

где

Ось ординат график пересекает в точке (0; с) .

Если квадратвое уравнение oz' + bz + е = 0 имеет действи- тельные корни z и z„ то парабола у = от' + bz + с пересекает ось абсцисс в точка (=і: 0) и (z ; 0).



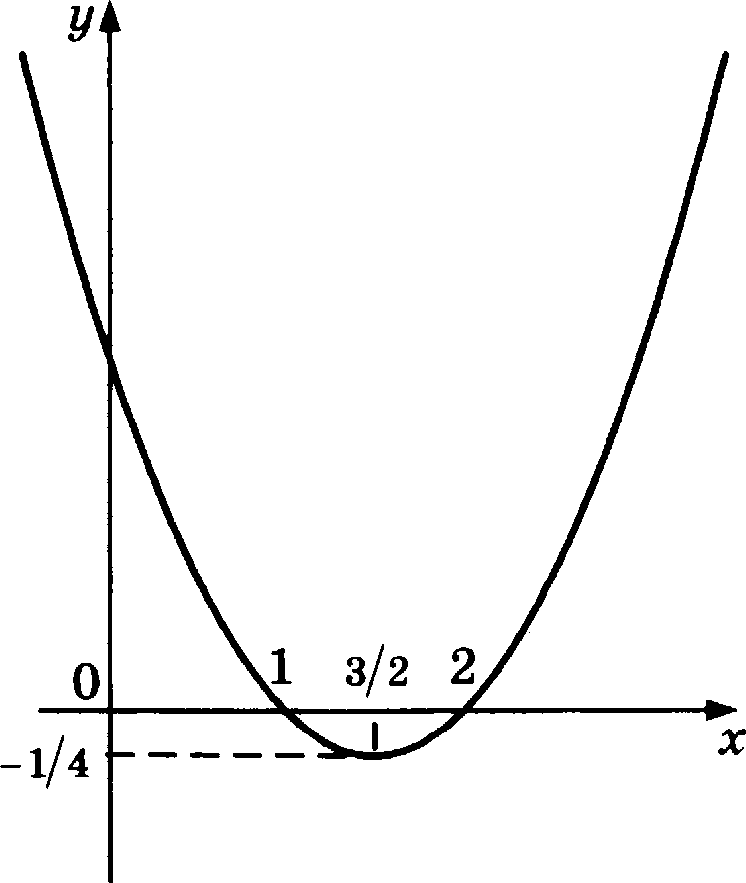
*М ривер 1.* Ррафик функции у = z' — 3z + 2. Уравнение z 2 — 3z + 2 = 0 имеет два корня: 1 и 2. Кооффициент при z'

бОльюе вуля, **зRачит, ветви Rаправлевы вверх. Вертива**

параболы **имеет** координаты

з ; — 1

2 4

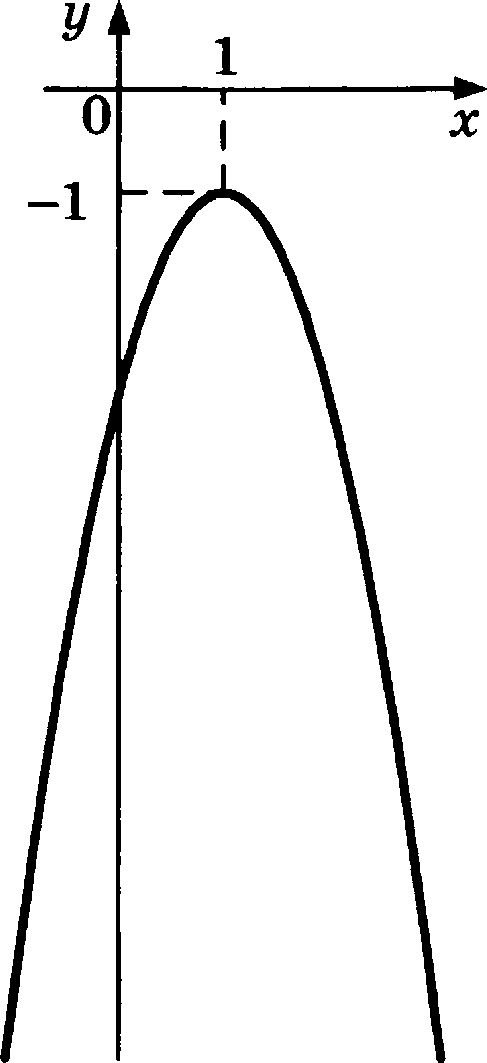


*М ривер 2.* График функции у = —2т' + 4z — 3.

Уравнение —2z' + 4z — 3 = О ве имеет деиетвительных кор-

ней *D ——* 4'- — 4 (—2) - (—3) = 16 — 24 = —8), значит, график не

перееекает ось абсцисе, ветви параболы ваправлены вниз. Вершина параболы находится в точке (1; —1).



**Задача** 277. Постройте графики функций:

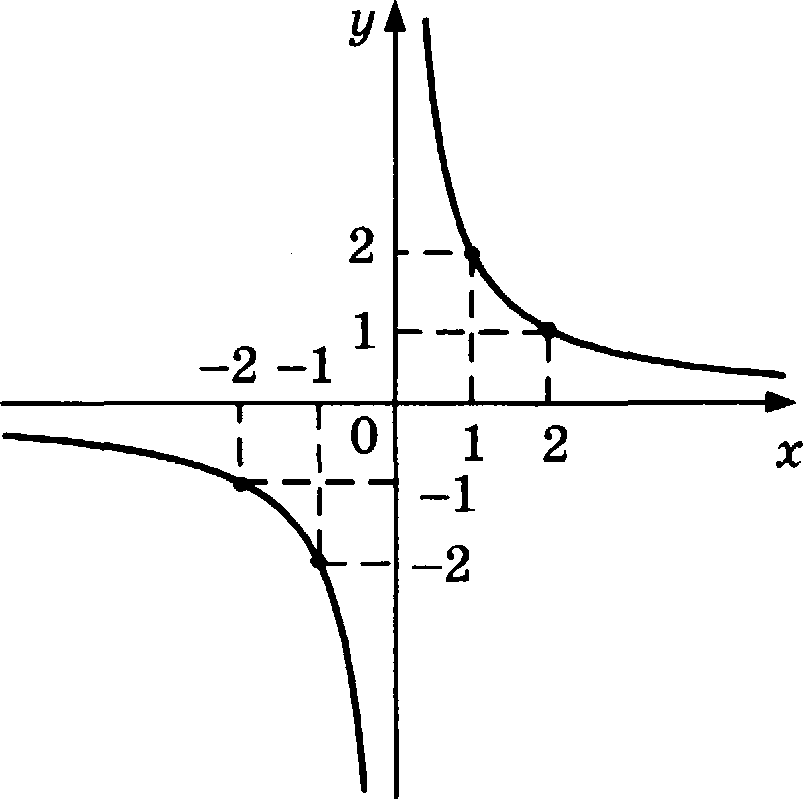
а) у = т' — 7т + **18;** 6) у = z' + 6z — 8;

= \_ \_ z — Зт + 8.

###### 2

Эту функцию называют **+обратная** пропорциональность» потому, что во сколько раз увеличивается т, во столько же раз уменьшается у и наоборот.

График — гипербола. На графике есть характернъіе точки (1; #), (#; 1), (—1; —#) и (—#; —1), с помощью которых график легко построить. Удаляясь от начала оси координат, график приближается к осям, но не пересекает их.

*Привер.* Ррафик функции у =2 . Ррафик удобно построить по точкам (1; 2), (2; 1), (—1; —2) и (—2; —1).

Задаяа 278. Постройте графики функций:

а) у — — 1 ;



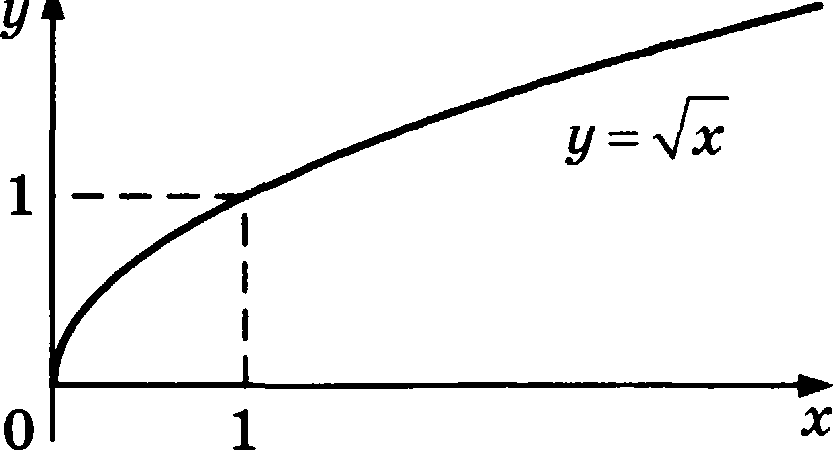
6) у = —2 + 3 ; 3

2m

—2.

Ррафиком служит половина параболы, ось которой совпа- дает с осью абсв;исс.

1іІ0

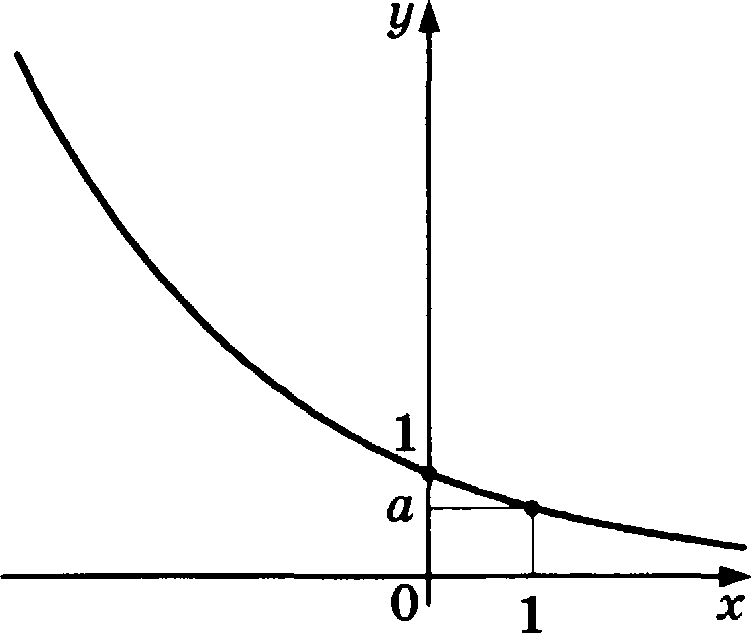
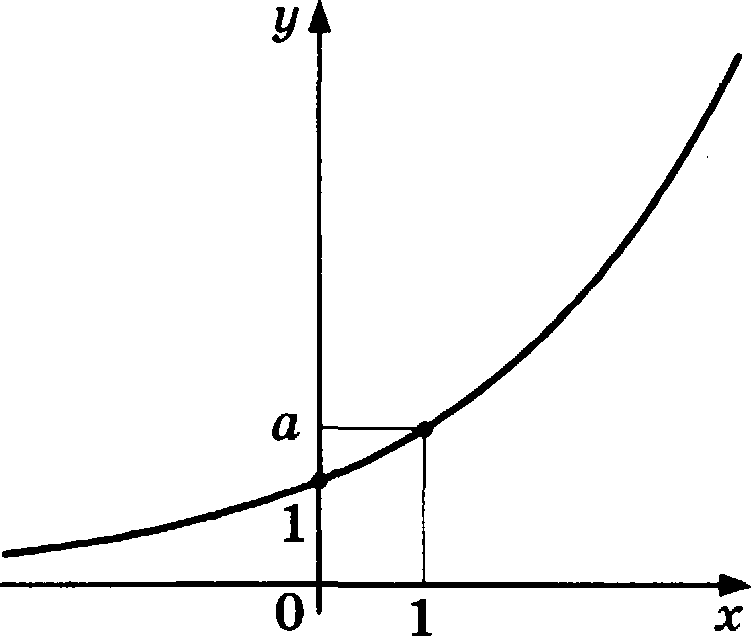


Зада•та 279. Іlостройте графихи фунхций::

а) у = — ; 6) у = 2 ; в) у = +1 .

**Поназательвая фувніщя** р = а‘

Ррафик перееекает оеь ординат в точке (0; 1). Вторая xa- рактерная точка (1; а). Функция возраетает, если о > 1. Функция убывает, если 0 < о < 1 .



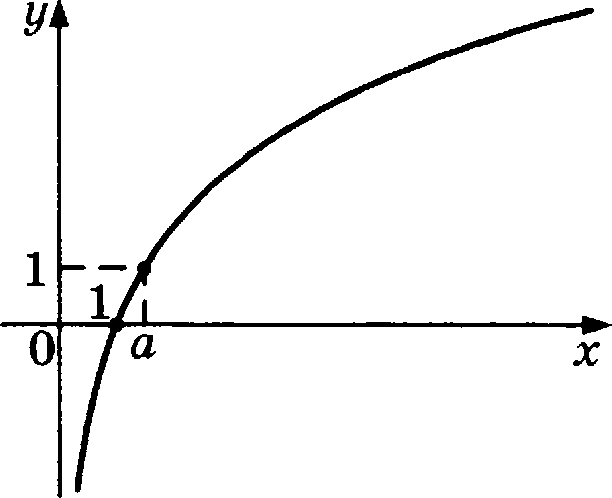
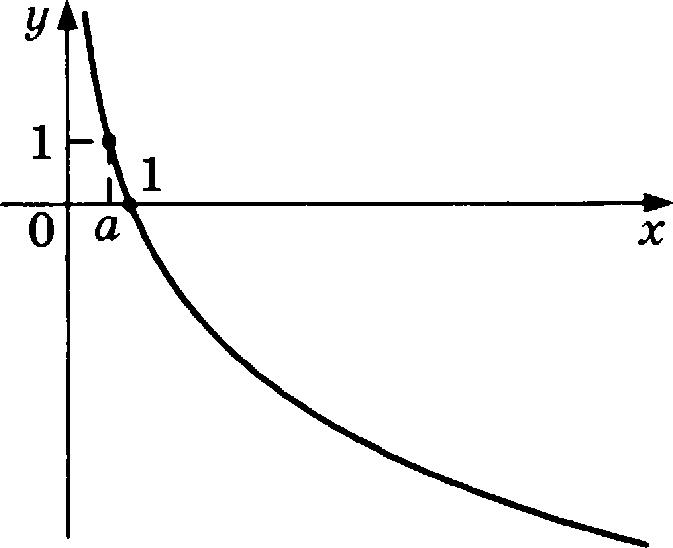
Задача2 .Постройтеграфикифункgиі:

а) у = 2° ; 6) у = 1

2

**Логарифмияеская фувкция** у = log к

**Графнк пересекает** ось абсqисс в точке (1; 0). Вторая xa- рактервая точка (о; 1). Фувкция возрастает, еслв о > 1 . Функция убывает, если 0 < а < 1 .

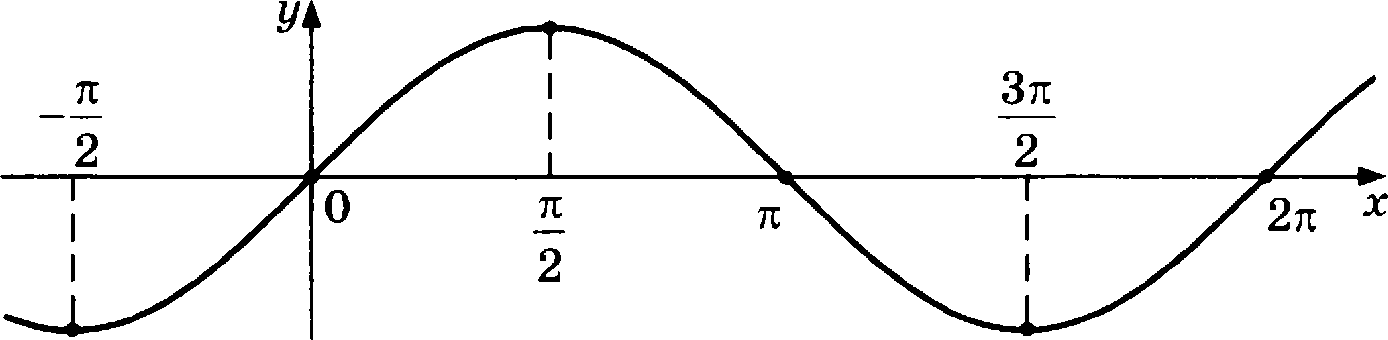
Задаяа **281. Постройте** графики функций:

а) у = log т; в) у = —log, z.

6) у = log, z;

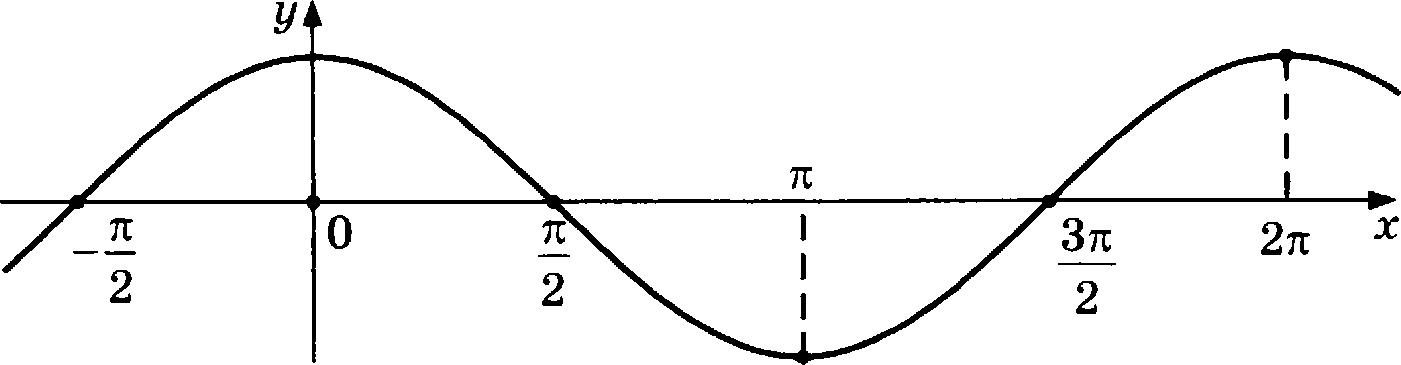
##### Тригонометрические функции

Сивус. Ррафик — волнообразвая линия (синусоида). На рисунке показаны характерные точки. Наименьший период 2к. Наибольшее значение 1, наименьшее значение —1. Пepece- кает ось абсцисс под углом 45°.

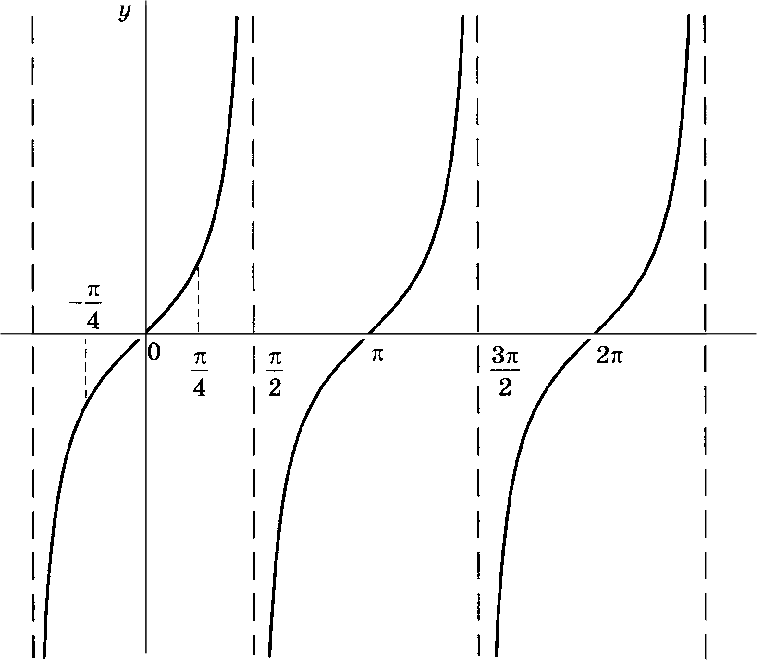


Іtосивус. Ррафик — тоже синусоида, но сдвинутая относи- тельно графика синуса на 2 влево. На рисунке показаны xa-

рактерные точки. Наименьшиіі период 2к. Наибольшее зна- чение 1, наименьшее значение —1.



**Таягевс.** Ррафик состоит из одинаковых кусков, каждый из которых пересекает ось абсцисс под углом 45°. Характер— ные точки показаны на рисунке.



Задача 282. Постройте графики функций:

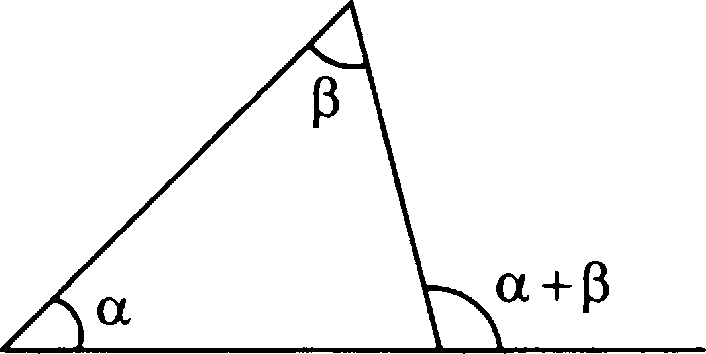
а) у = — cos z; 6) у = sin z **+1;** в) у = tg z —1.

###### Геометрия

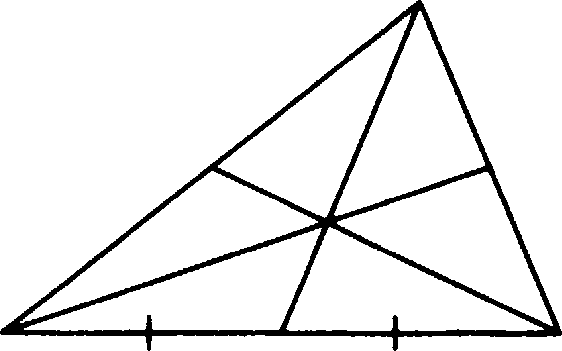
Общие свойства треугольников

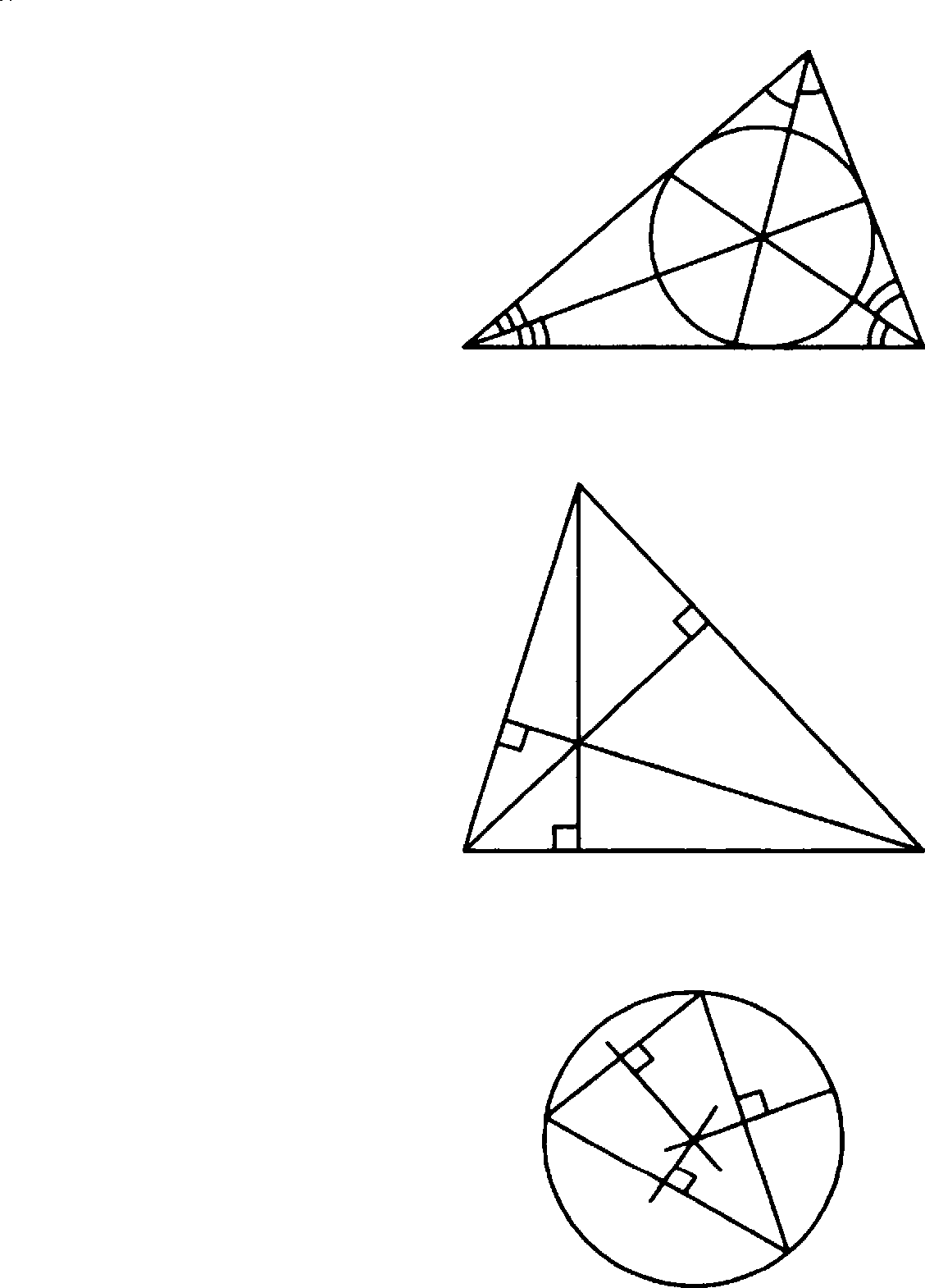
Сумма углов треугольника равна 180°.

Внешний угол равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. При решении задач иногда важен более про- стой факт: внешнии угол больше, чем любой внутренний угол, не смежный с ним.



Медиавы пересекаются в одной точке (центр треуголь- ника).

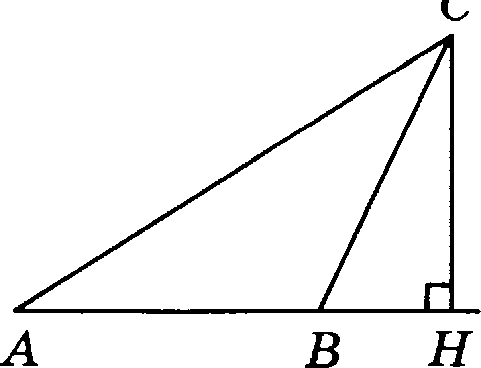


Биссектрисы вересекаются в одной точке (девтр вписан- ной окружности).

Высоты или их продолжения пересекаются в одвой точке (ортоцентр).

Середиввіае перпевдикуляраі к сторонам треугольвика вересекаются в одной точке (центр описанвой окружности).

*М ример.* В треугольвике ВВС угол *А* равен бО , *CH —* высо- та, угол *BCE-1* равен 75°. Найдите угол *ACB.* Ответ дайте в

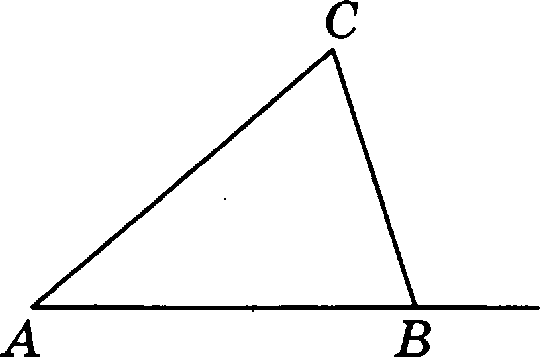


*Решение. ШСВ —— ШСН — ZBCH .*

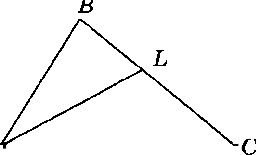
Угол CCII равен 180° — М — CC = 180° —6° —90° = 84° .

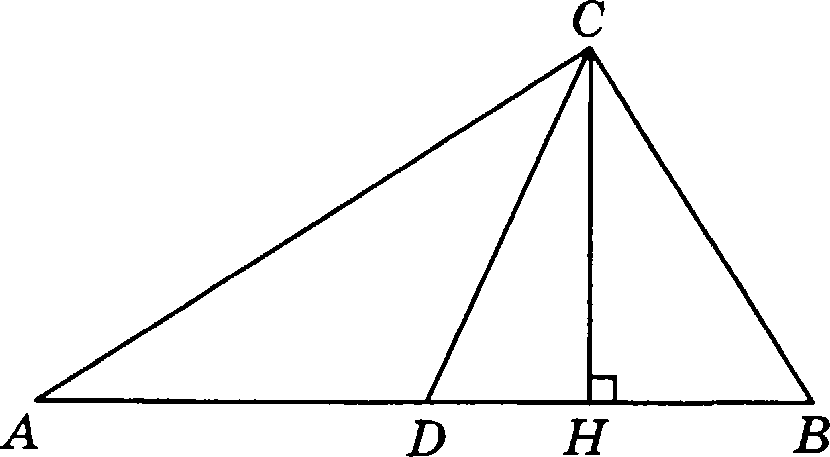
Откуда *СВ ——*84° — 75° = 9° .

Omaem: 9.

Задача 283. В треугольнике ВВС угол А равен 20°, внешний угол при вертияе *В* равен 61°. Найдите угол С. Ответ дайте в градусах.

Задача 284. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол А£С равен 121°, угол АЛС равен 101°. Найдите угол *ACB.* Ответ дайте в градусах.

*А *

Задаяа **285.** В прямоугольном треугольнике угол между высо- той и биссектрисой, проведевными из вершины прямого угла, равен 13°. Найдите меньший угол данного треуголь- **ника.** Ответ дайте в градусах.

**Вписаввая и описаввая окружвости.** В любой треугольник можно вписать **окружность. Центр окружности** лежит в точке пересечения биссектрис.

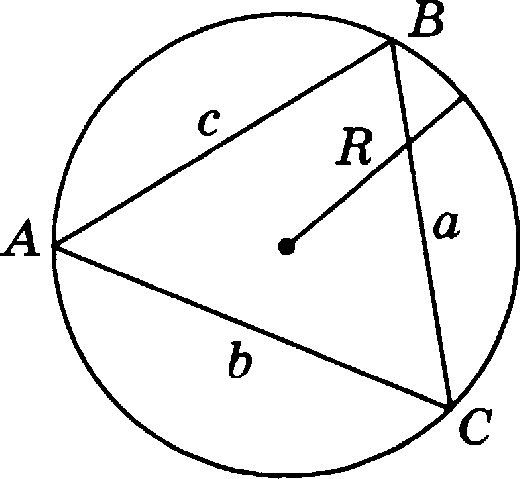
()К ОЛО ЛЮЁЇО PO Т}З£І **РОЛЬНИКі1 МОШНО OПИCilTЬ ОК}З ШНОСTI:•.**

Центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуля- ров к **сторонам треугольника.**

Теорема сивусов. В любом **треугольнике отношения сторон**

к синусам противолежащих углов одинаковы:

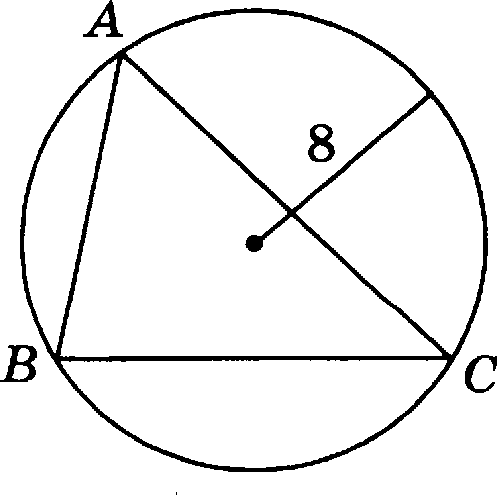
sin А sin *В *

Кроме того, **эти отношения** равны удвоенвому радиусу описанной окружности.

Теорема **косивусов.** Для любого треугольника справедливо равенство

с° = о° + b° —2oб cosC,

где о, b и *с —* стороны, а угол С — противолежащий стороне с.

Это равенство позволяет найти сторону, оная две другие стороны и угол между ними. Нли можво найти угол, зная три стороны.

*Пример.* В треугольнике ABC угол С равен 45°, сторона AB = 432 . Найдите радиус описанной окружности.

*Решение.* По теореме синусов *2R ——* AB \_ 432 =8:

sin С 1

2

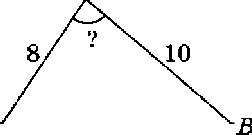
откуда *R ——* 4.

*Ответ:* 4.

Задаяа 286. Радиус описанной окружвости треугольника ВВС равен 8, угол ABC равен 60°. Найдите длину стороны *AC.*

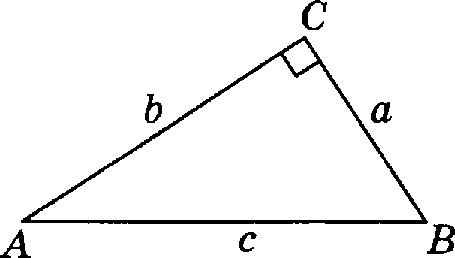
Задача 287. Стороны треугольника ABC равны 8, 10 и 12.

Найдите косинус угла, противолежащего стороне длины 12.

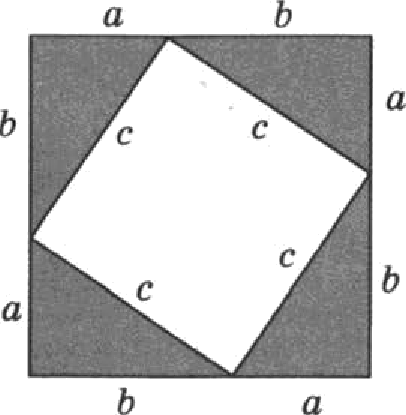
10

*А* 12

Прямоугольные треугольники

**Теорема Пнфагора.** В прямоугольвом треугольнике тео- рема косинусов принимает более простой вид: *2 2+ b2* квадрат гипотенуоы равен сумме квадратов катетов.

Докажем теорему Пифагора. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами о и *b н* гипотенузой *с.* Возьмем еще три таких ›ке треугольника и приложим иz друг к другу так, как показано на рнсунке.



Получился большой квадрат со стороной о -1- *b,* а внутри — малый квадрат

со стороной *с.*

С одной стороны, площадь большого **квадрата равна** (о -1- *b)',* а с другой стороны, она равна сумме площадей четырех прямоугольных треугольни-

ков и площади малого квадрата: 4 *—*1 *ob+ с'* , то есть *2оЬ* -1- *Й.*

2

Приравняем эти два выражения для одной и той же площади:

*\a* + d)' = **2od** + Е.

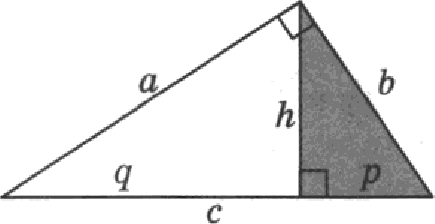
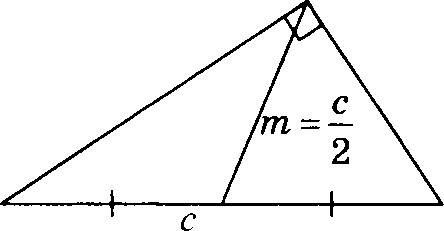
Раскроем скобки и приведем подобные:

*& +* 2аЬ *+ d = 2аЬ* + Й; & -F & = Й,

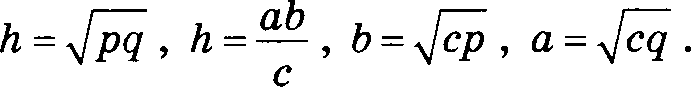
что и требовалось доказать.

Похожее доказательство получается, если сложить четыре треугольника иначе. Попробуйте.

Свойство медиапы. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Свойство высотъі. Высота, проведенная к гипотенузе, де- лит прямоугольный треугольник на два треугольник а, кото— рые подобны между собой и подобны большому треугольнику.

Обозначим высоту *h,* а отрезки гипотенузы *р* и q. Из подо- бия треугольников следуют полезные равенства:



**Соотвошевия между сторовами** и углами. В любом прямо- угольном треугольнике катеты и гипотенуза связаны триго- нометрическими функциями:



sin А = —, cos А = —, tg А —

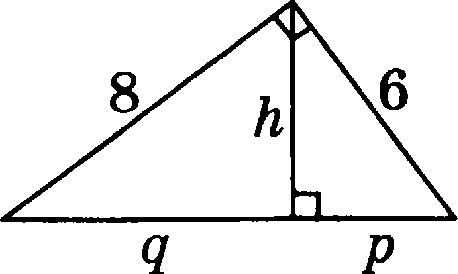
с с h

*М ривер.* Из вершины прямого угла треугольника проведе- на высота. Катеты треугольника равны 6 и 8. Найдите длины отрезков, на которое вмсота делит гипотенузу, и длину высотм.

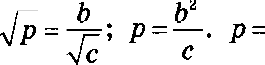
*Решение. TIo* теореме Пифагора найдем гипотевузу:

с = 6' + 8' = **3636+4** = 10 .

Отсюда найдем высоту h =р = 6 8 = 4,8 .



Преобразуем формулу *д= фр , чтoбы* найти из нее *р:*

6' = 3,6. Аналогично, s

10

Omaem: *р* = 3,6; g = 6,4; h = 4,8.

8' = 6,4.

10

Задаяа **288.** Один ио **катетов прямоугольного треугольника**

равен 6, а еинуе прилежащего к нему оетрого угла равев

###### - Найдите длину:

а) второго катета;

6) гипотенузы;

в) высоты, проведенной из вершины прямого **угла;**

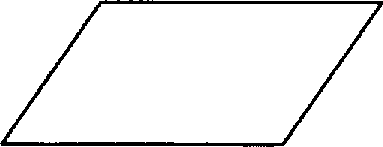
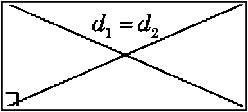
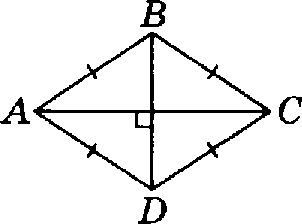
г) медианы, проведенной **из вершины прямого угла;**

д) длины отрезков, на которые высота делит гипотенузу.

**Четмрехугольнипи**

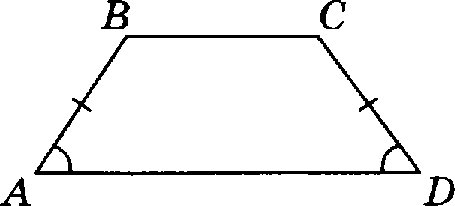
**Параллелограммы** — общее название группм четырех- угольников, у которых противоположные стороны попарно na- раллельвы. Еели углы у параллелограмма прямые, получается прямоугольвик. Если все стороны равны, получается ромб.

Квадрат — одновременно и прямоугольвик, и ромб.

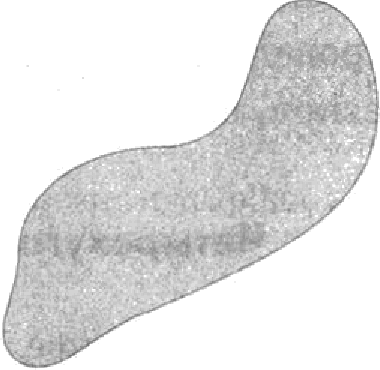
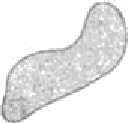
У прямоугольника диагонали равны между собой. У ромба диагонали перпендикулярны друг другу.

Трапеция — четырехугольник, у которого параллельны

только две противоположные стороны. Они называются осно- вавиями. Две непараллельные стороны называются боковы- ми сторонами трапеции. Если боковые стороны равны, трапе- ция называется раввобедреввой или раввобокой.

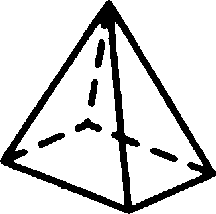
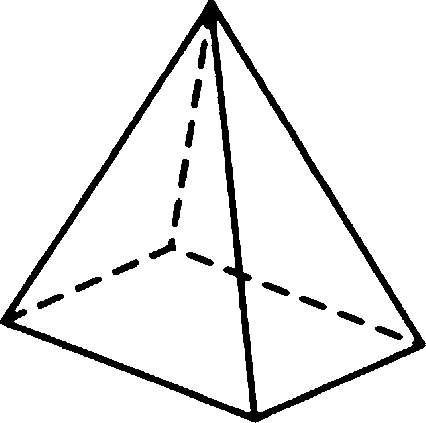
#### Подобные фнгуры

Если две фигуры имеют одинаковую форму (расстояния между соответствующими точками пропорциональны, соот- ветствующие углы равны), то говорят, что такие фигуры по- добвы. Совсем просто: подобные фигуры одипаковы по форме, но могут отличаться размером.

Подобными бывают ne только треугольники. Все квадраты подобны друг другу. Все круги подобны друг другу.

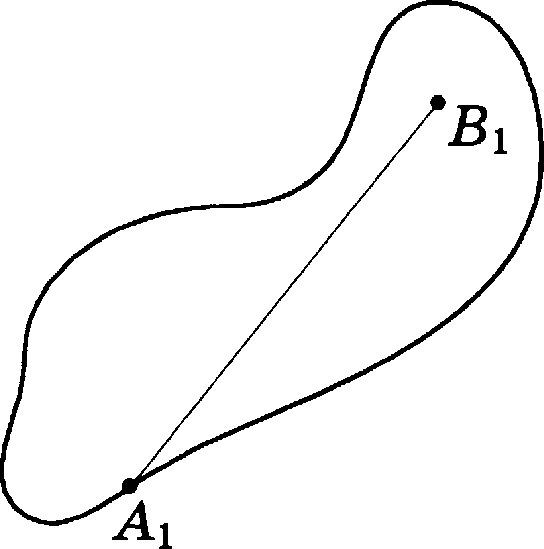
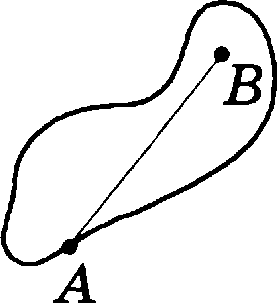
*Рис. Подобньtе фигурьt*

###### Подобны могут быть фигуры не только на плоскости, но и в пространстве. Например, все шары подобны друг дpУry.

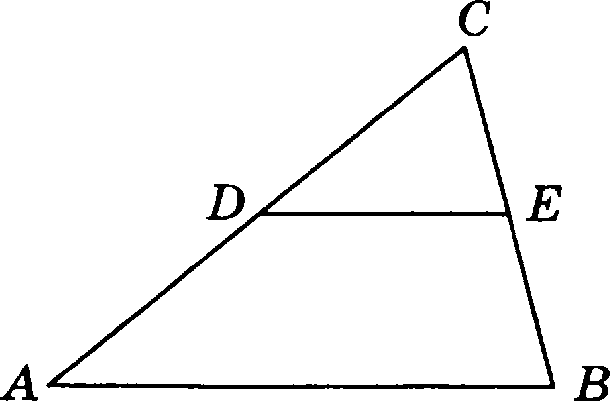
*Рис. Модоdньtе пиратидьt*

**Еоэффициевт подобия** — множитель, покаоывающий, во сколько раз подобные фигуры отличаются по раомеру. Если взять в каждой из двух фигур по отрезку, соедивяющему co- ответствующие точки, то коэффициент подобия равен отно- шению длин этих отрезков. При этом редко указывают, в ка- ком порядке делят длины. Поэтому, если фигуры подобно с коэффициентом 2, можно сказать, что они подобяы и с коэф- фициентом 0,5.



*Рис. А В —— 2АВ; 2 — коэффициент подобия*

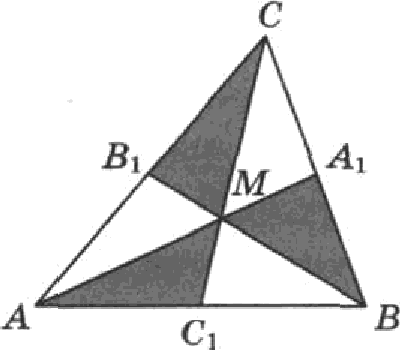
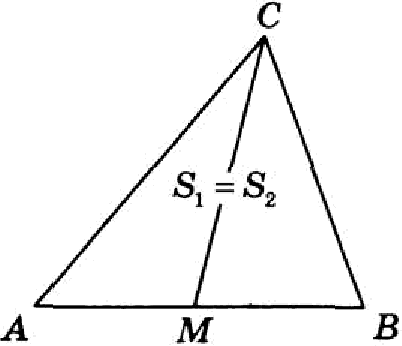
Задача 289. В треугольнике AfiC проведена средняя линия *DC* (см. рис.). Покажите, что треугольники CDE и AfIC подоб- **ны,инайдитекоэффициентподобия.**





**Свойство меднав треугольвнка.** Медиана разбивает тре- **угольник** на два треугольника одинаковой площади. Все три медианы раобиваіот треугольник на шесть треугольников

ОДИНВКОВОЙ ПЛ£їЩ&ДН .



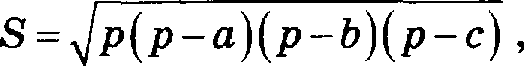
**Отвотевяе іілотqвдей подобвмх фнгур.** Отношение пло- сqвдей подобных фнгур равно нвадрату коэффициента подо- бия. Например, если одна из фигур в 2 раза больюе другой (по дливе), то по площади она больте в 4 раза.

###### Формулы плоіцадей треуюлъвиков

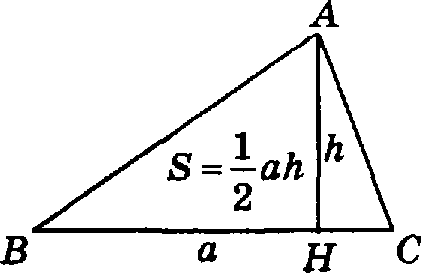
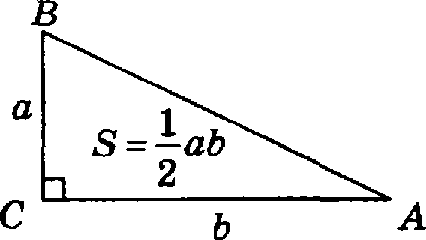
Для орямоугольных треугольников эти формулы приобре-

так›т более простой вид: S 

###### 2

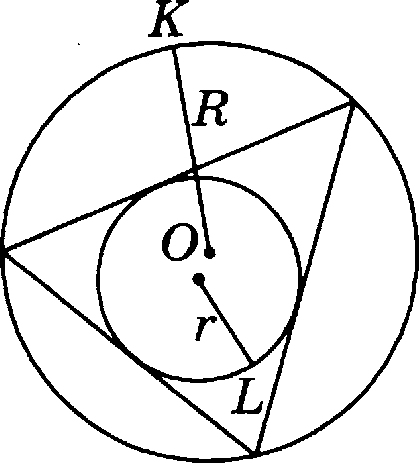
Формула Герова:

где *р —— ~~+ “~~ —* половина периметра треугольяика (полупе- риметр).

Связь между площадью треугольника и радиусами вписанной и описанной

окружностей: fi= *rp* и *abc*

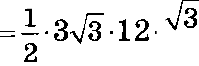
4P

*М puмep 1.* Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 333 и 12, а угол между ними равен 60°.

*Решение.* Воспользуемся формулой площади треугольника по двум сторонам и углу между ними:

*Ответ:* 27.

fi = —absin С

2 2

=2T.

*И puмep 2.* В треугольнике со сторонами 3 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой из этих cтopou, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

*Решение.* Обозначим вторую высоту z. Вычислим площадь треугольника двумя способами:

8 = 2 3 4 = 2 6 т

откуда получим уравнение для z: z = 3 4 = 2 .

*Ответ:* 2.

Задаиа **290.** Медианъі треугольника CC пересекаются в **точке** *М. BK —* медиана. Площадь треугольника ABC равна 24. Найдите площадь треугольник а *AMK.*

Задача **291.** Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. fiоковая сторо- на треугольника равна 30. Найдите площадь этого тре- угольника.

**Задача 292.** Найдите площадь орямоугольного треугольника,

если его катет и гипотенуоа равны соответственно 10 и 26.

Задаяа 293. Периметр треугольника равен 36, а радиус впи- санной окружности равен 5. Найдите площадь этого тре- угольниха.

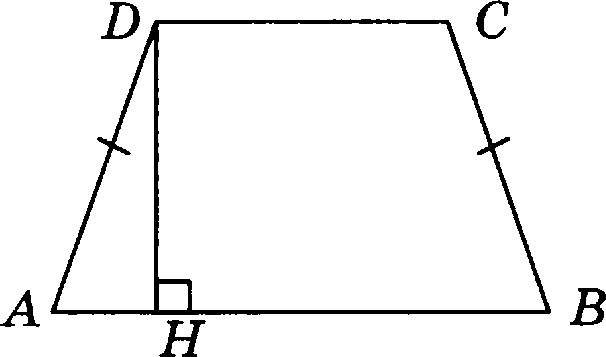
Задача 294. Стороны треугольника равнія 4, 13 и 16. Найдите его площадь.

Задача 295. Площадь треугольника равна 36, а его стороны равны 9, 10 и 17. Найдите радиус описанной окружности.

Площадь параллелограмма: fi = of = o6sinC . Неважно, какой ио углов считать углом С в отой формуле: синусы всех углов у параллелограмма равны.

###### 2

*Мривер.* Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



*Решение.* Сначала найдем длину боковой стороны:

*AD + BC +* 14 + 26 = 60,

откуда AD + *BC* —— 2 AD = 60 — 14 —26 = 20 ; AD = *BC ——* 10.

Опустим высоту *DH* на основание AB, тогда

*\_ AJ3 —CD*

2

=6.

Теперь по теореме **Пифагора** найдем длину высоты *DH.*

*DH —— AD 2 2* 100 — 36 = 8.

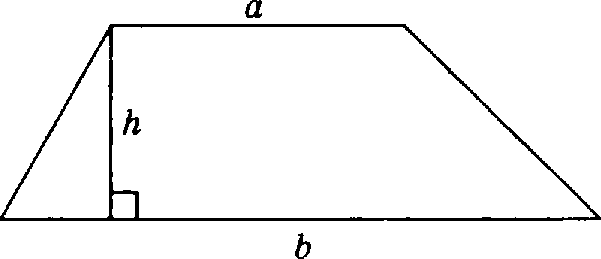
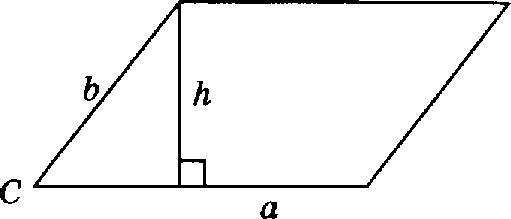
Площадь трапеции равна

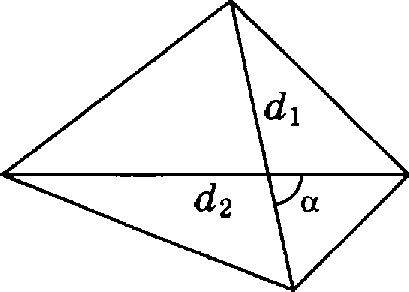
*Ответ:* 160.

\_ 14 + 26

2

###### 8 =160.

**Пповlадь пронзвольвого яетъірехугольвпка:**



1*—d ,d2* sin п , где п — угол между диагоналями. Если

###### 2

диагонали перпевдикулярны (например, в ромбе), формула принимает более простой вид: Л *———*1 *d,d*

###### 2

**Формула Пнка. Если** на клетчатой бумаге иоображен мно- гоугольвик так, что все его вершины находятся в уалах сетки, то площадь мвогоугольника равна

*+ — Е —!,*

#### 2

###### где f — число узлов сетки внутри мвогоугольника, а £ — чис-

ло узлов на грапице (в частности, вершиньт).

Плоіqадь крута:

I = 9, *Е* = 10

S = 9 + 5 — 1 = 13

Число п с точностью **до сотых полагают 3,14.**

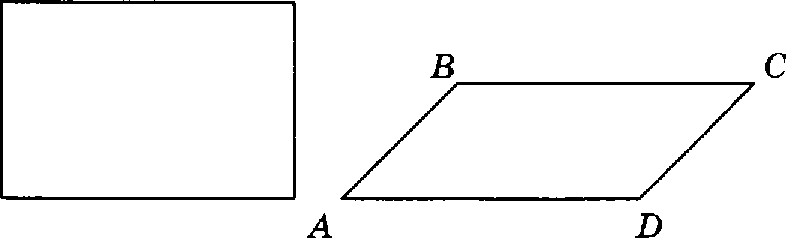
###### Задаяа **286. Найдите** площадь ромба, если его диагопали рав- ны 13 и 6.

**205**

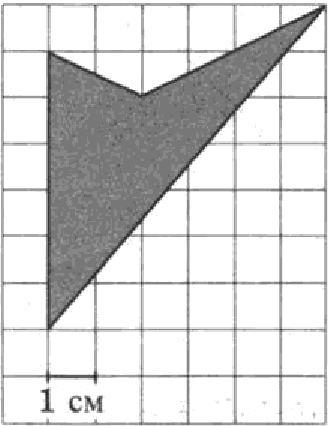
Заааяа 297. Найдите площадь квадрата, если его диаговаль

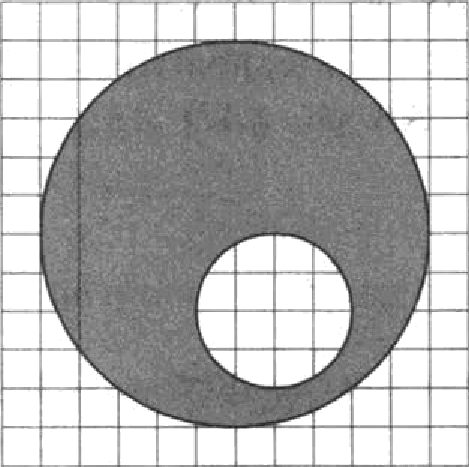
равна 11.

Задапа 298. Стороны параллелограмма равны 6 и 12. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 9. Найдите высоту, опущенвую на вторую сторону параллелограмма.

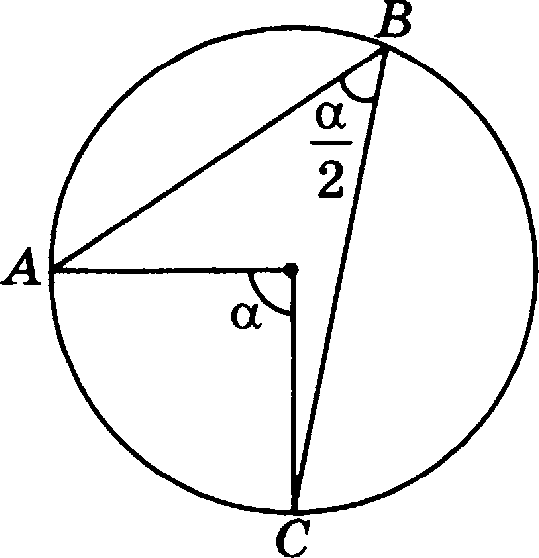
Задача **299. Параллелограмм** и прямоугольник имек›т одина- ковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольви- ка. Ответ дайте в градусах.

###### Задаиа **300.** Пользуюсь формулой Пика, найдите площадь че- тырехугольника, изображенного на рисунке.

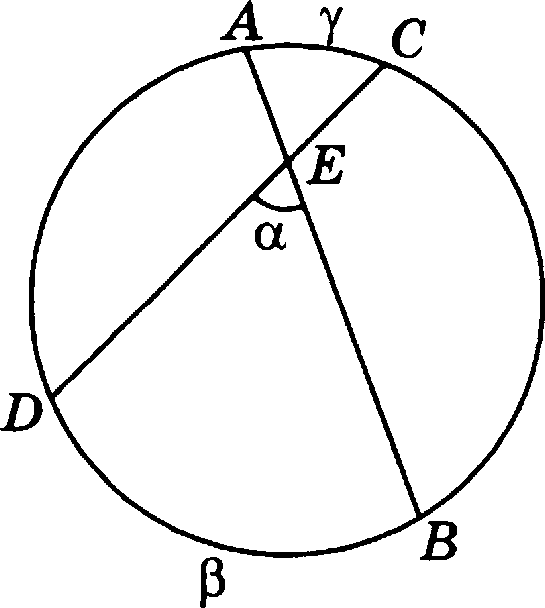


Задача **301.** На клетчатой бумаге иаображены два круга. Пло- щадь внутреннего круга равна 16. Найдите площадь за- штрихованвой фигуры.

Опружности, zордм, **сепущие**

**Впнсаввый утол равен половине** и;евтрального угла, опи- рающегося на ту же хорду (или дугу).

**Пронзведевне отрезков** хорд. Точка пересечевия *Е* двух хорд AB и *CD* окружности раабивает их на четыре отреака, причем AE- *EB —-СЕ- ED.*

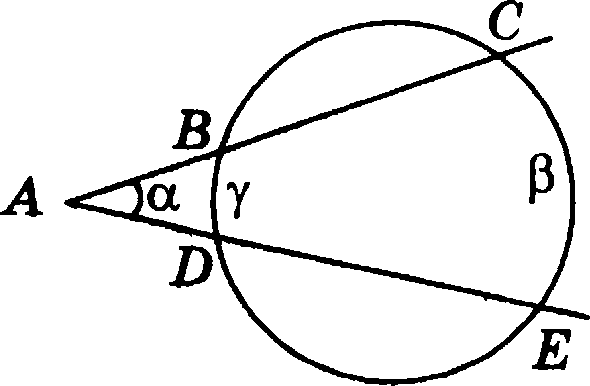


**Угол между пересекающнмнся хордамн** равев полусумме угловых мер дуг, ааключевных между хордами:

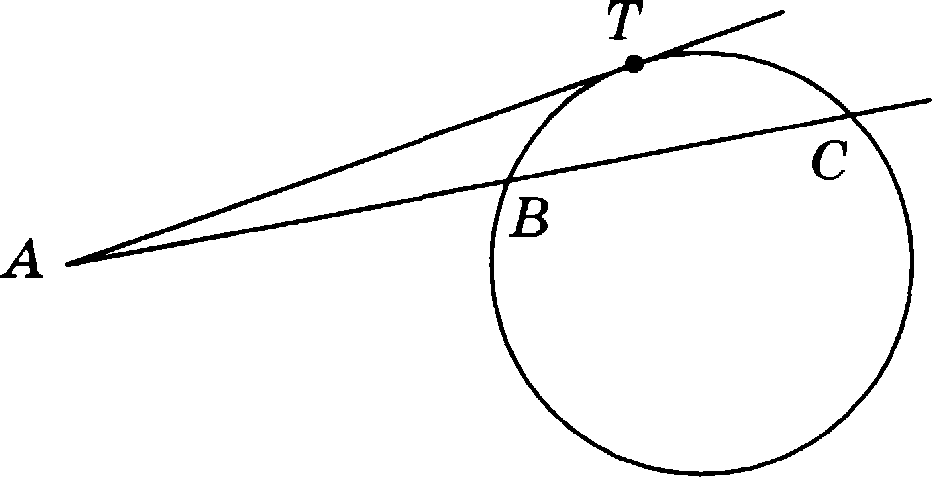


#### 2

Теоремы о **секущих.** Если иа точки *А* проведены две секу- щие к окружвости, то проиаведевия этих секущих на их внешние части равны: ТВ -AC=AD -АБ.



20T

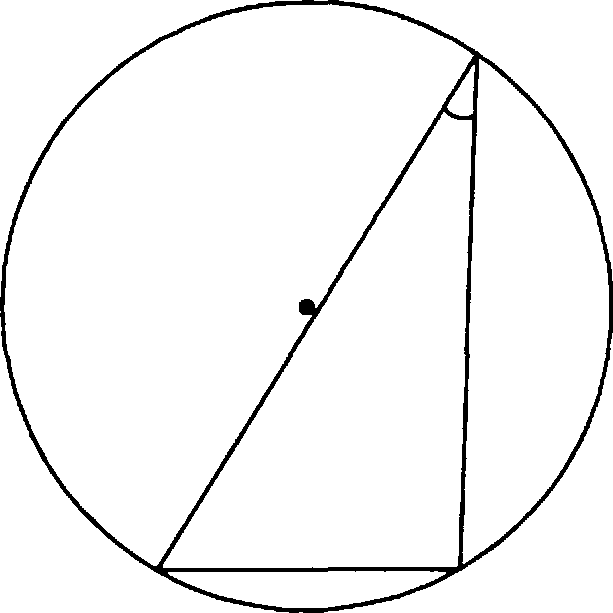
Близкий по смыслу факт: если из точки *А* проведены секу- щая и касательная к окружности, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной: ТВ CC = *АТ 2 .*

Угол между секущими равен полуразности угловых мер дуг, заключенных между секущими:



2

Длияа окружности радиусом *г* равна *2иг.*

*Пpuмep.* Найдите величину острого вписанного угла, опи- рающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.

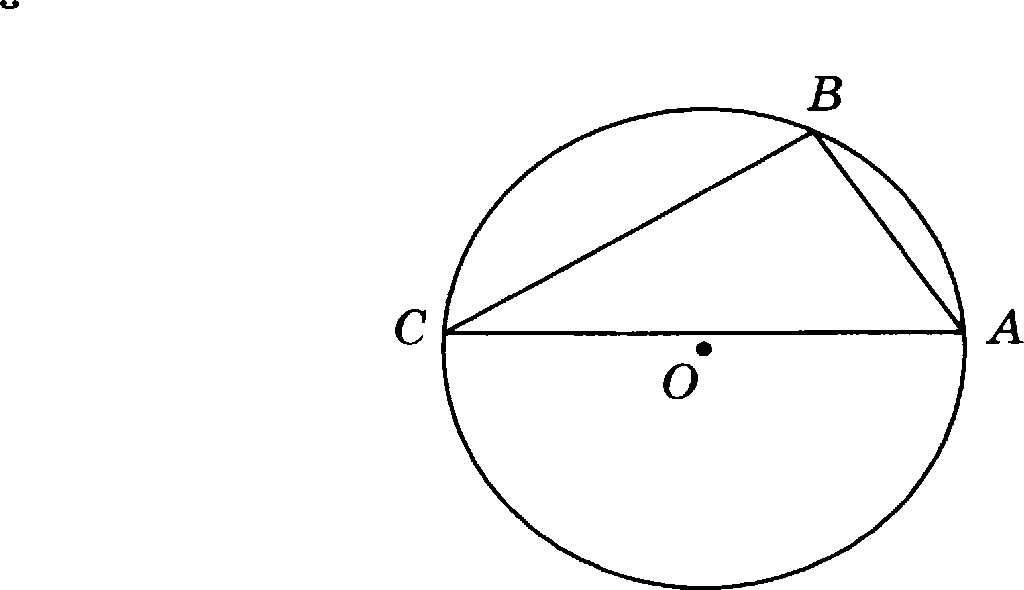
*Решение.* Так как длина хорды равна радиусу окружности, то центральный угол будет углом равностороннего тре- угольника и, значит, равен 60°. Вписанный угол в два раза меньше центрального — 30°.

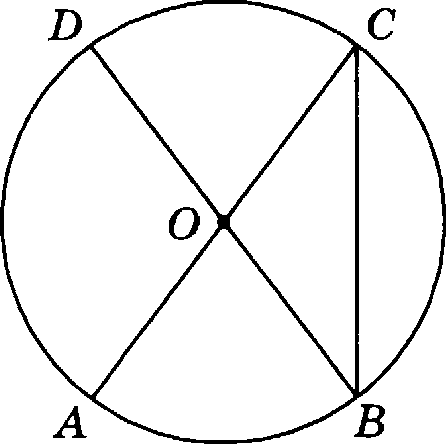
*Отвеін:* SO.

Задача **302.** Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу,

длина которой равна i длины окружности. Ответ дайте в

градусах.

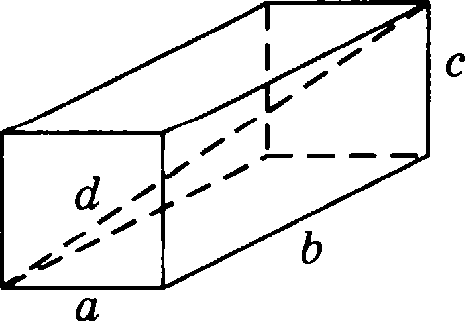
Задаиа ЮЗ. Точки А, *В, С,* расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные меры которых относятся как 1:3:5. Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ даите в градусах.

Задаиа 304. Отрезки CC и *BD —* диаметры окружности с цен- тром О. Угол *ЯСВ* равен 51°. Найдите угол *ЯOD.* Ответ даи- те в градусах.



**Теорема Пифагора** для прямоугольного параллелепипеда. Сумма квадратов трех ребер прямоугольного параллелепипе- да, выходящих из одной вершины, равна квадрату диагонали:

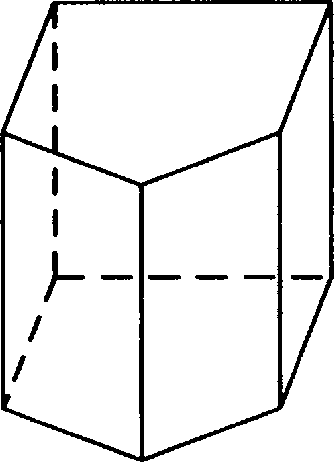




**Эйлерова карактеристика.** В любом многограннике число ребер *Е* на 2 меньше, чем общее число вершив U и граней *F:*

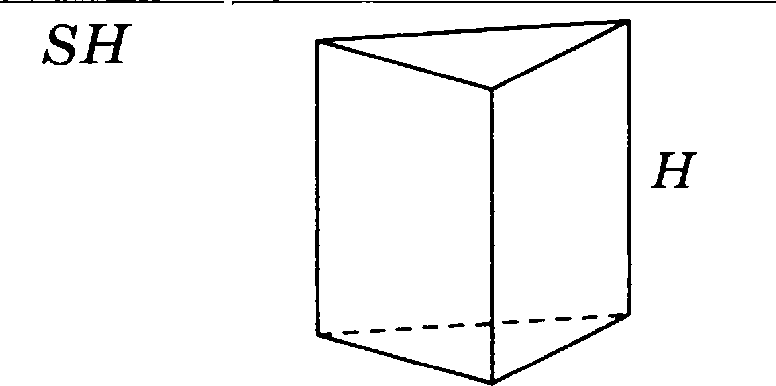
У + *F — Е ——*2.

*Мример.* ПроВерим для пятиугольНОй призмы. ВершиН 10, граНей 7, ребер 15.

10 + 7 — 15 = 2.

п«очади поВерхНосТей и объемы

НекоТО]ЗыХ MHOrorpaHHuKOB и Тел ВращеНия

ПоясНения к Тllблице: *Р —* периметр осНОВіlНІ4я, 6 — IiJIO- щадь ocHOBI1HI4 І, *R —* радиус, — Высота.

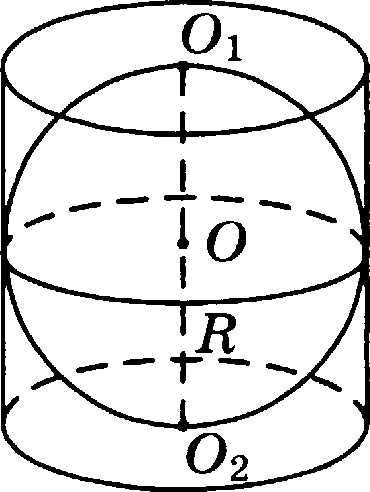
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тело | площадь  поВерхности | Объем | Рисунок |
| **Пј3НМі1Н**  призма | *PH* (бокОВіlя)  *PH + 251*  (С OC Н OBilHИНМИ |  |  |
| }Зі1ВИЈІ£•-  ная пира-  **МИДП** С B£•-I  СОТОЙ  бокОВО  Р}ЗПН И | 1 *РА* (бокОВаН)  2  1  *— РА + s*  2  (с осноВанием) | 1££  3 |  |
| ЦиЈіl4НД}З | 2яRH (боковая)  2nltff + 2пЛ'  (C OCH OBilHHHMH | *uR’H* |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Конус с o6-  разующей  *L* | *rRL* (боковая)  *rRL +* nI t2.  *е* основанием) |  |  |
| Шар |  |  |  |

Объем описаввого около сферы мвогограввика: 

где S — площадь поверхности многогранника, а *г —* радиус вписанной сферы.

*II puмep.* Цилиндр, объем которого равен **120,** описан около шара. Найдите объем шара.



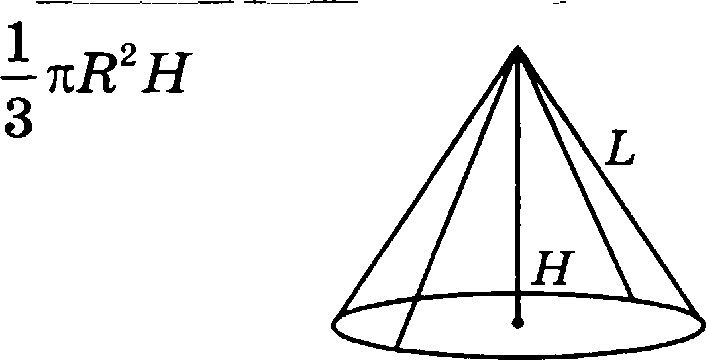
*Решение.* Поскольку шар вписан в цилиндр, высота ци- линдра равва диаметру шара. Пначит, объем цилин,цра ра- вен

Г„,

откуда кIt' = 60.

-= яIt'

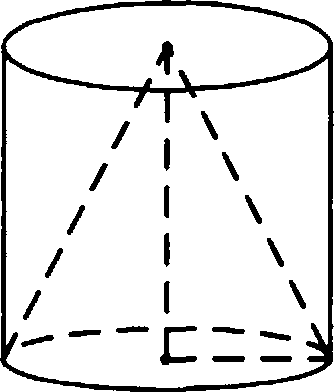
2It = 2пЛ' = 120 ,

Объем mapa равен Гq, = 4 пЛ' 4 60 = 80.

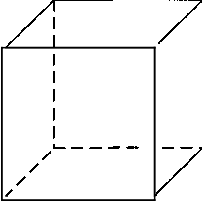
*Ответ:* 80.

**3apa•ia 305.** QBa pe6pa npnooyrons oro napannenen neqa, os- xoqn iie ma oq oii Bepiu **si, £fBH£•I 12 ii 3.** Qiiaro ans na- panneneriHneqa panna 13. Haiiq Te o6xeM napanneneri neqa.

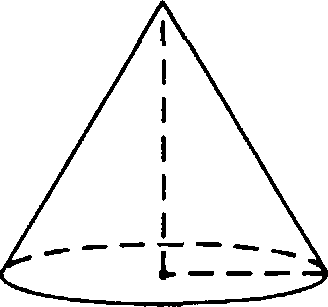
3apa•ia 306. IJ,iiuiiiipp x noiiyc iiueioz o6 iie ocHoBaHue u Bsico- Ty. O6xeM p n qpa paBe 120. Haiiq Te o6xeM xo yca.



3apana **307.** Pe6pa npnMoyrons oro napannenen neqa **paBHsI 1,**

5 ii 9. Haiiqiize rino aqs ero noaepx **OCTH.**

3apana **308.** Qn a oxpym **oCT Oc** oBa n xo yca panna 3, o6- paoyio an **paBiia 4. HaiiqiiTe** nno aps **6oxOBOii noBepxiiOCTH** xoiiyca.



3apana 309. HaiiqiiTe nno aqs noBepxiiOcTii npaBiinsaoii ueTsi- pexyrons oii n paM qsi, **CTOpo ei** oc oBa n **KOTOpoii** paB si 12 H BeicoTa paBiia 8.

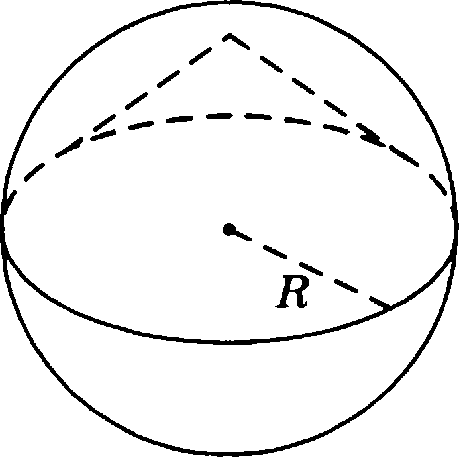
'I

/ 'I

,'8i

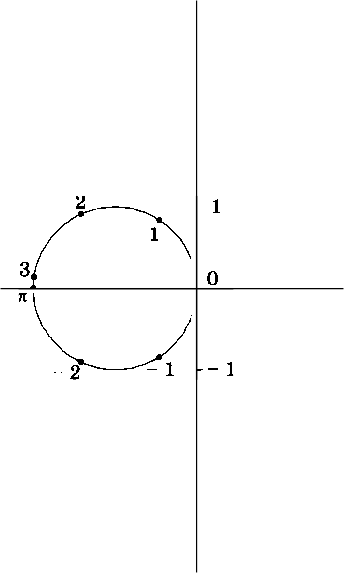
12

**3aдaяa 310. Конус** Воисав В шар. Радиус осНоВавия конуса pa- Вен радиусу шара. Объем ковуса раВен 10. Найдите объем шара.



**Т§2НгОНонеТрия**

ТQИfiОНометрнческая опр/ЖНОСТЬ. МИНУС, itoCнHyc н таНгеНс Трнговометрнческая окружвость (единичная, числоВая) —

это окружноСТь, цеНтр которой находиТСя В начале координаТ, а радиус раВев 1. На ТригономеТричеекой окружноСТіl ОТкла- дыВаюТея числа Так же, как на чиелОВОй прямой. Начальную Точку ВыбираюТ на перееечевии е положительН£•Ім лучом оеи абециее. А заТем оТкладыВают числа, дВигаясь протиВ чаеоВОй сТрелки. ПолучаеТея, что чиеловую прямую «нПМОТ&Ли» на окружносТь, как витку на катушку.

- 3

удцрааленцq 2

-2

— 3

Число 1 попадает в точку, которая соответствует дуге при- мерно в 57°. В точку, диаметрально противоположную началу отсчета, попадает число п. Таким образом, п — длина половины окружности единичного радиуса. п — число иррациональное.

Можно сопоставить углы и числа на окружности. Числа отсчитывают от выбранного начала, а углы — от направлении оси абсцисс. Числу 0° соответствует 0, углу 180° соответствует п. Отсюда получаются значения для всех прочих углов. Фор-

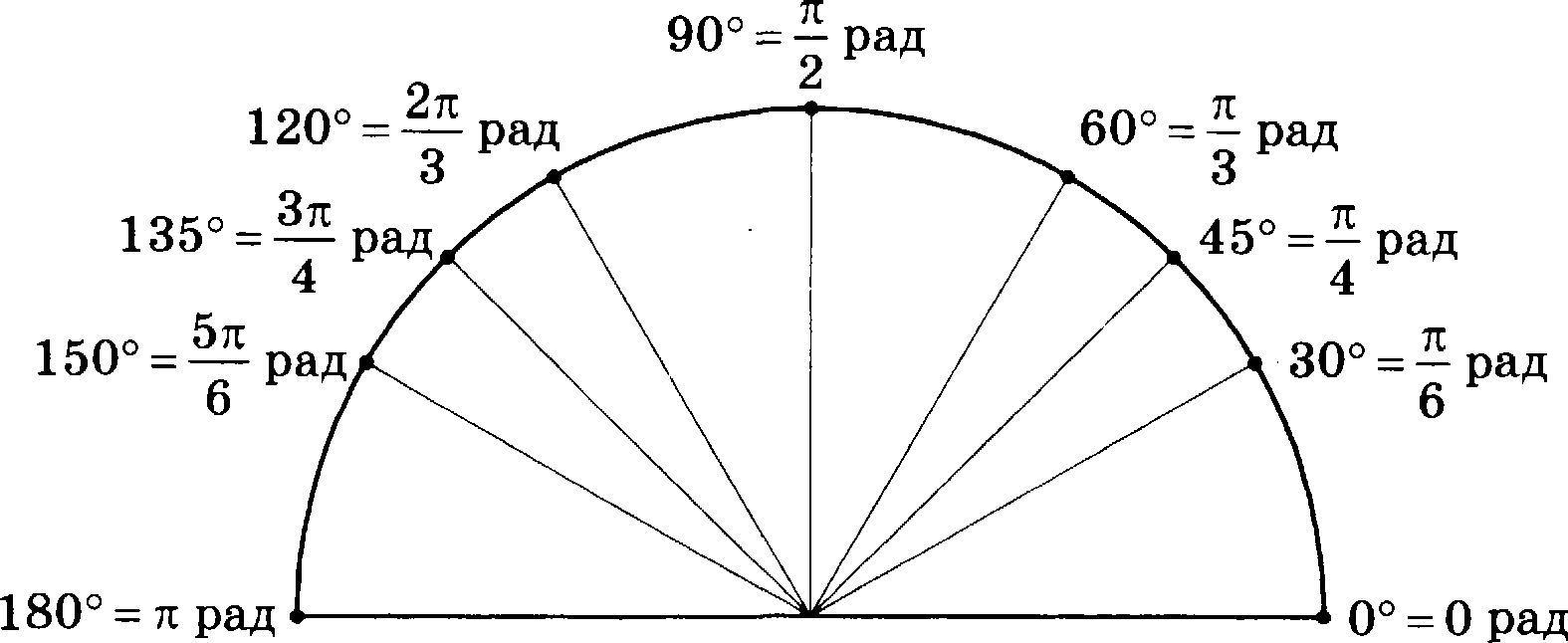
мула: о

— 180 '

где о° — интересующий нас угол, а о — соот-

ветствующее ему число.

Важвые **звачевия на** промежутке от 0° до 180°, которые полезно помнить для решения задач, мы покажем на рисунке.

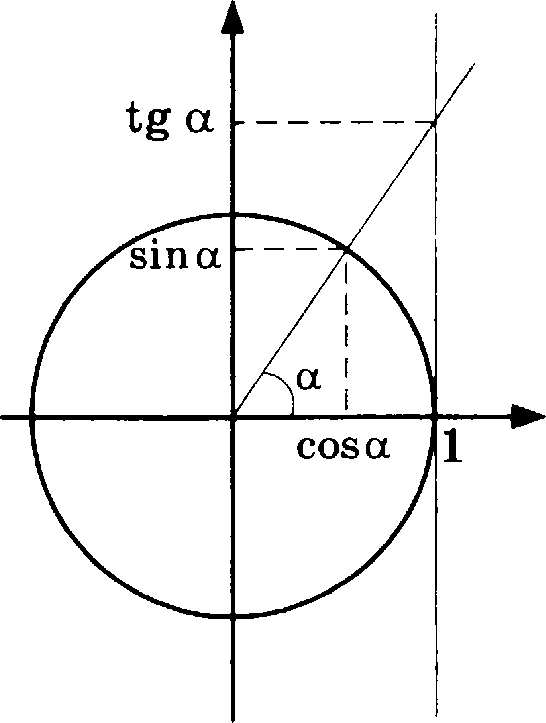


Радиавяая мера угла. Сопоставление чисел на тригоно- метрической окружности и углов в градусах неудобно. Намно- го удобнее отождествить числа и соответствующие им углы. Получается другая единица измерения углов. Она называется

«радиан» . Точка 1 на числовои окружности соответствует уг- лу 1 радиан. Иногда добавление про радианы опускают. Пpo-

cтo пишут угол 1. Точка 2 соответствует углу .

Босивус и **сивус числа.** Если на окружности взять произ- вольную точку (угол) п, то в прямоугольной системе коорди- нат эта точка имеет координаты: абсциссу и ординату. Они на- зываются соответственно косивусом и сивусом числа п.

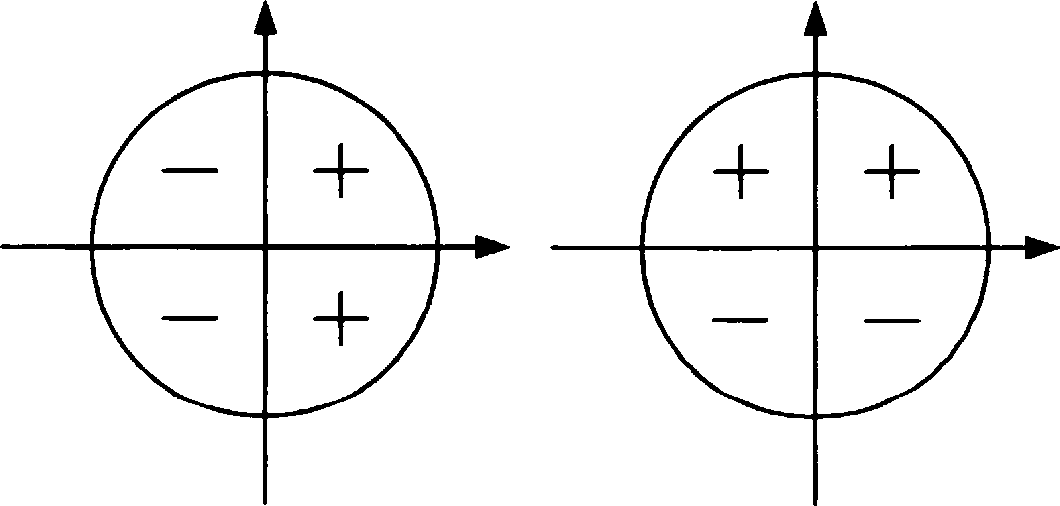
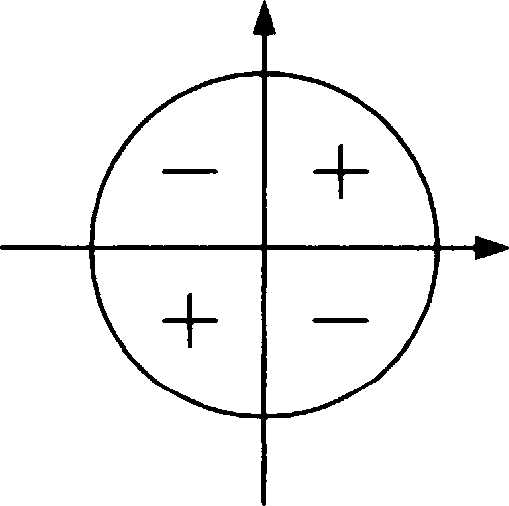


**Тавгевс числа** п — отнотение синуеа п к коеинусу п:

**Геометрически** тангене можно интерпретировать как точку на вертикальвой орямой, касающейея тригонометричеекой окружноети еправа. Такая прямая называется осью тавгевсов.

##### Знани тригононетричесних функций

**Зваки косивуса** и сивуса. Поскольку косинус является абецисеой точки числовой окружности, он положителен в правой полуплоекоети и отрицателен в левой. Синус — орди- ната отой точки. Поэтому синус положителен в верхней полу- плоекоети и отрицателен в нижней. На риеунке показаны знаки косинуса, синуса и тангенеа.

**WHO Ktt KOCtt HJCO** знокіі *тангенса*

Задача **311.** Определите знаки **тригонометричееких функций:**

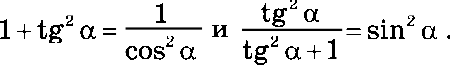
а) **sinl55°** ; 6) cos 6 ; **в) tg320°** .

**Основное тригонометрическое** тождество

Из теоремы Пифагора получается равенство, которое вы- полняется при всех п:

COS' О + SiП' cl= 1 .

Это равенство называется **основным тригояометрическим тождеством.** Из него следуют еще две формулы связи между разными функциями:



Пользуюсь отими формулами, можно находить одну триго- нометрическую функцию, зная другую.

*Мример 1.* Найдите cosn, если sinn =— 2 и 180° < п < 270° .

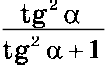
Выразим косинус через синус, пользуюсь основным триго- нометрическим тождеством:

cos о= i — s inz - i —144 25 \_ Й ' . В третьей четверти

###### 169 169 13

косинус меньше нуля, значит, cosn = — $ .

*П puмep 2.* Найдите tgn, если sinп = 0,6 и 90° < п <180° .

*Решение.* Известно, что = sin' п= 0,36 , откуда

tg' о — 0, 36tg2 о + **0,36** ;

**0,64tg2** о = **0,36** ;

z 2

0,36 \_ 0,6 3

0,64 0,8 4

Поскольку п находится во второй четверти, тангенс отри- цательный, значит, tgn = —0, 75.

Падачу можно решить и другим способом — пользуясь ос- новным тригонометрическим тождеством и определением тангенса:

cos2 п = l— sin’ п = **l—0,36** = 0,64 , косинус меяьше нуля (п во второй четверти), значит, cosn = —0,64 , откуда

sino 0,6 = —0,75 .

cosn 0,8

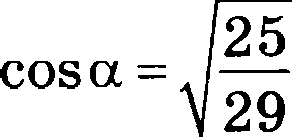
*Пpu:хер 3.* Найдите coso, если tg о = —0, 4 и 270° < о < **360°** . *Решение.* Преобразуем формулу так, чтобы из нее было удобно вычислить косинус:

1 1 \_ 1 25

COS’ О

1+ tg' о **1+ 0,16 1,16 29**

В 4-й четверти косинус больте нуля, значит,

25 \_ 5

29 2

Задачи

Задача **312.** Найдите tgn, если cosn = 21

###### 13

и‹іе **0; 2 **.

 и о е 2; п 25

Задача **314.** Найдите sinn, если cosо = —

10

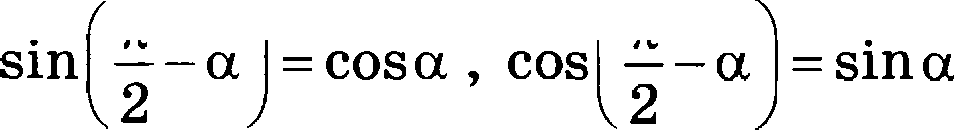
Формулы приведения для синуса и косинуса

По графикам синуса и косинуса (см. стр. 192) видно, что одна функции выражается через другую ‹сдвигом» . Кроме то- го, графики обладают симметрией. Например, график синуса симметричен относительно начала координат, а график коси- нуса — относительно оси ординат.

Отсюда следует ряд формул. Помимо этого, обе функции периодичны с наименьтим периодом 2s, то есть при увеличе- нии (уменьшении) аргумента о значения синуса и косинуса повторяются через каждый оборот окружности, то есть через каждые 2s.

cos(—o) = cosn (•іетвость косинуса).

sin(—n) = —sin п **(вечетность сивуса).**

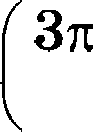
sin(n +2к)= sinn (периодичвость сивуса). cos(n + 2п)= cosn (периодиивость косивуса). siп(n + п) = —sin п , cos(n + п) = —cos п ,

Из этих формул можно получить множество других.

*Привер 1.* Найдите sin  2 — п  , если cosn = **0,45** .

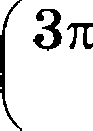
*Решение.* Представим sin

###### —а хак

2

sin —— п + п = —sin —— п 2 2

*Ответ:* —0,45.

*II ривер 2.* Найдите cos

= —cos п = —0,45 .

+ п , если cosо = 12 и

2 13

###### 2 '

*Решение. TI* реобразуем выражение:

cos

2

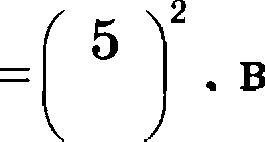
+ п = cos

2z——+

###### 2

= cos п —— = cos — — п = sin п .

2 2

s п п = i — cos' п = i — 144 25

169 169 13

меньше нуля, значит, sin о = — s

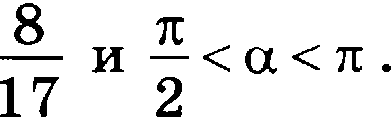
lз

4-й четверти синус

*Ответ: —*

lз

Зада•та 315. Найдите cos о — 2  , если sin п = 0, 23 .

+ п , если sin п =

Задача 317. Найдите cos

2

+ п , если cosn = 4 > о< « < \*

2 5 2

Задача 318. Найдите значение выражения 6cos19”

sin 710

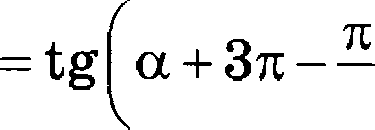
Формулы прнведевня для тавгевса. Используя формулы приведения для синуса и косинуса, их периодичность и свой- ство четности, можно получить формулы приведения для тан- генса. Оказывается, что наименьший период тангенса п. Это видно и на графике функции тангенса (см. стр. 193).

tg(—n) = — tg п (яепетяость тангенса). tg(n +п)— tg п (периодичвость таягевса).

2 tg п = ctg п (эта функции называется котавген-

*11ривер.* Найдите tg 2 + п , если tgn = 0,4.

*Решение.* Преобразуем выражение:

 1

2



1

0,4

2

= —2,5 .

2 2 В — — ' — tgo =

*Ответ:* —2,5.

Задача **319.** Найдите tg п-E—

2

, если tgn = 0, 5.

Задапа 320. Найдите tg п — з , если tgn — 10.

2

Формулы спожения и формупы двойного аргумента

Формулы косинуса, синуса и тангенса суммы и разности часто бывают полезны при решении задач.

Косинус суммы: cos(n + §) = cosn cos§ — sin nsin§.

ОСИН С ]ЭППНОСТИ: COS(Ct — ) - COS Ct COS + SiП Ct SÏП .

Синус суммы: sin(n +§)= sinncosb+ cosnsinb. Синус разности: sin(n — b) — sinпcosb —cosnsin§.

Тангенс суммы: t 

Тангенс разности: tg(n —§)

Подставив о = Ц , можно получить формулы двойного угла:

косинус двойного угла: cos2n = cc›s п \_ siriz п ; синус двойного угла: sin 2s = 2sinпcosп ;

тангенс двойного угла: tg2n =

2tgn

*Мривер 1.* Найдите tg105°.

*Решение.* Представим тангенс в виде тангенса суммы yr- лов, тригонометрические функции которых нам известны:

 tg45° + tg60° 1+ 3 \_ + ' \_

tg105° = tg 45° + 60°)

\_ 1+3 + 233 ——2—33.

###### —2

*Ответ:* — 2 — 33 .

l—-tg45°

tg60° ° l—›,U3 l—3

*Привер 2.* Найдите cos(n + §) , если sin п = 12

13

90° < < 180° , 0° < § < 90° .

*Решение. Qяя того* чтобы найти косинус суммы, придется сначала вычислить cosn и sin § .

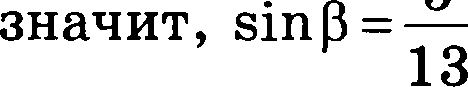
cos п = i — 9 16

рой четверти косинус меньше ну-

JIH, ЗНіlЧИТ, COSCt == — — .

sin 2 § = 1 — 144 \_ 25 , в первой четверти синус больше вуля,

169 169



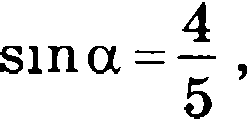
Теперь вычислим косинус суммы:

5 13 5 13 65 "

Задача 321. Найдите cos2s , если cosn = 1

###### 2

Задаяа 322. Найдите sinl5° .

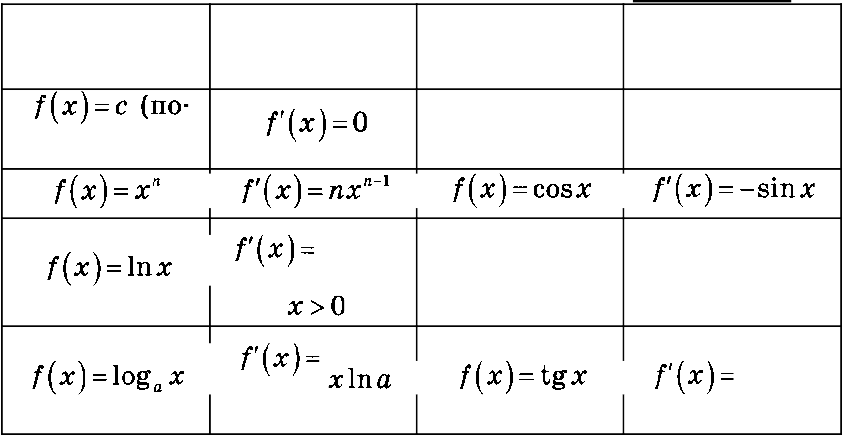
Задача 323. Найдите tg(n —§) , если  900 < <180° , 1800 < § < 270° .

COS =- 8

17

#### Элененты матенатического анализа

Таблица производных эпементарных функций

Функции Шроиаводнал Фунхцил Шроизводнал

стоянная)

*[(х) е‘ ['(х) — е‘*

1

”’ /(i)=sni Д(i)=cosi

1

при i>0

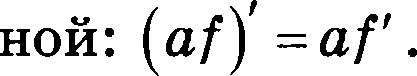
1

**COS'** Х

Правила дифференцирования

**Пронзводвая суммы и развостн.** Производную еуммы функций можно вычиелять отдельно по елагаемым:

Аналогичная формула верна для суммы произвольного числа слагаемых, а также для разности.

**Чнсловой мвожнтель можво выносить** за анак производ-

Производвая произведения.

**Производяая яаствого.**

f \_ f' a—f -в'

в в

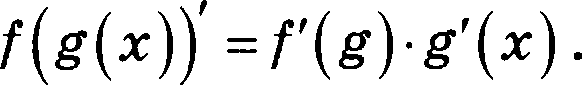
Разумеется, формула применима во веех точках, кроме

тех, где g(z)=0.

Производвая сложвой фувкции (композиции фувкций).

Еслинутновзлть производнуюфункции,сконбивированной

**221**

из двух функций, то сначала дифференв;ируется внешняя функции, а потом — внутренняя:

*Привер 1.* Найдите производную функции *у = х* —8) *е" .*

*Решение.* Воспользуемся формулой производной произве- дения функций:

у’ —(х — 8)’ *е‘!’ + х —* 8 *- е )’* = *е‘* +(т —8) -$ e“ 9 )' .

Теперь воепользуемся формулой производной сложной функции:

*е‘ ’+ х —* 8*-*)

*= х —7- е‘*

*е‘* 9 )'= *e“ 9+* (т — 8) *е‘* 9 (т — 9) = *е‘* ’+ (-z — 8) *е‘ ’=*

*Ответ: х —7) е“’.*

*Привер 2.* Найдите производную функции у = 232 +5

sini

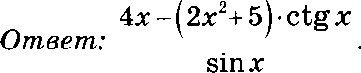
*Решение.* Воспользуемся формулой производвой **частного:**

#### siпт $2<'+ s)’ —sin' т-(2‹'+ s) 4тsiп т—$2т'+ 5) cosт

sin'i sin’i

4z — 3232+5) ctg т





Задача **324.** Найдите производную функции

у = 3z’ — 7z' + 23 2 5z + 9.

Задаяа 325. Найдите производную функции у = $т' + Зт + i) ln т.

Задача **326.** Найдите производную функции›=i -1

**Поиск точек экстренуна**

Требуется найти **точку максимума (мивимума)** дифферен- цируемой функции /(т) на каком-то промежутке или на всей

числовой прямой.

1. Следует вычислить производную функции /'(z) .
2. Нужно решить уравнение /'(z) — 0 , чтобы найти точки, в которых касательная к графику горизонтальна.

На промежутках между найденными точками нужно

определить знаки производной. Если в точке производ- ная меняет знак с плюса на минус, то это точка макси- мума. Если знак меняется с минуса на плюс, то эта точ- ка — точка минимума. Если и справа, и слева от точки знак один и тот же, то такая точка не является точкой экстремума — ни точкой максимума, ни точкой мини- мума.

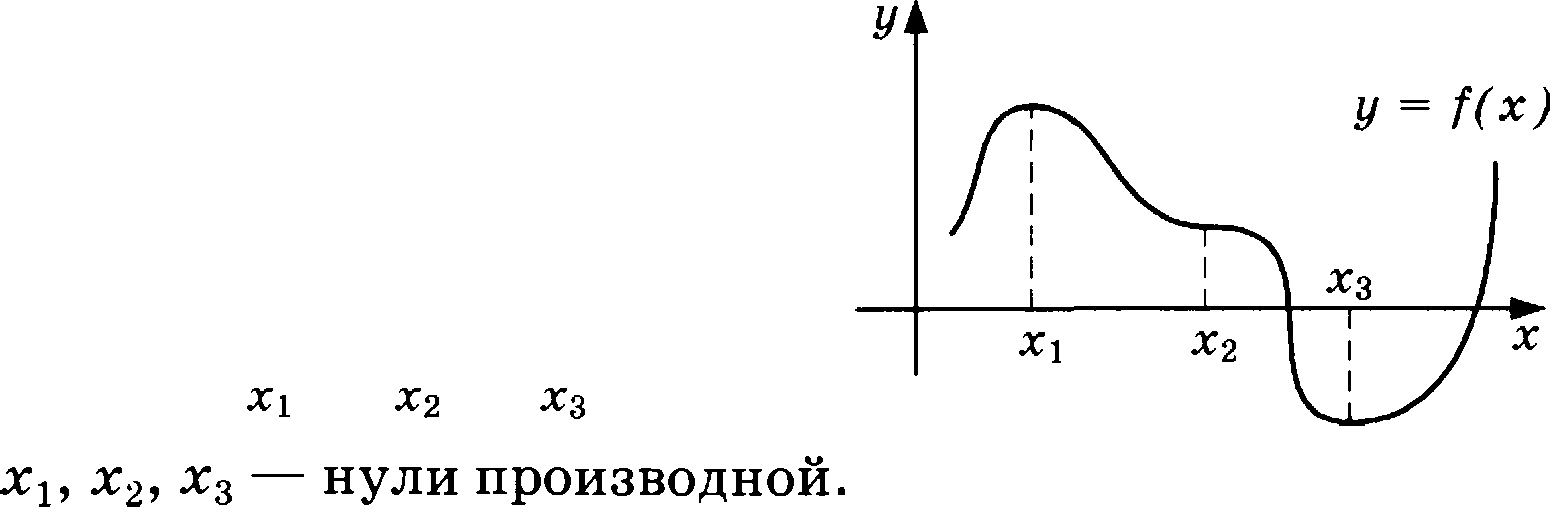


Схема показана на рисунке. Слева — знаки производной и стрелками схематично показано, возрастает или убывает функция. Справа — пример графика функции, ведущей себя указанным способом.

*Мример.* Найдите точки максимума и минимума функции

у = т' — Зт' — 9z +15 .

*Решение.* Найдем производную:

у' = 3z' — 6z — 9 = 3$x2 — *2x* — 3) .

Производная равна нулю в точках *х -- 3* и z = —1. Произ- водная меньше нуля на интервале (—1; 3) и больше нуля вне этого отрезка. В точке —1 она меняет знак с плюса на минус, значит, это точка максимума. В точке 3 производ- ная меняет знак с минуса на плюс, значит, это точка ми- нимума.

*Ответ: х ——* —1 — точка максимума, z = 3 — точка минимума.

Задача. Найдите точки минимума и максимума функций: а) у = —2z" + 6z — 24 ; 6) у = z' — 93 2 + 15a —12 .

Поиск наибольшего или наименьшего значений функции на отрезке

Задача **327.** Требуется найти наибольшее (наименьшее) зна- чение дифференцируемой функции /(т) на каком-то от-

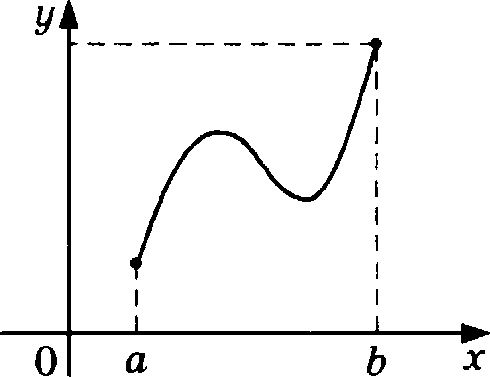
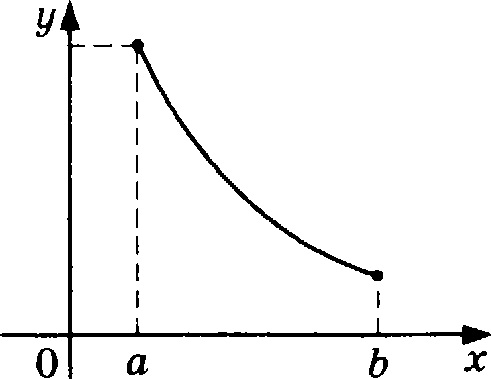
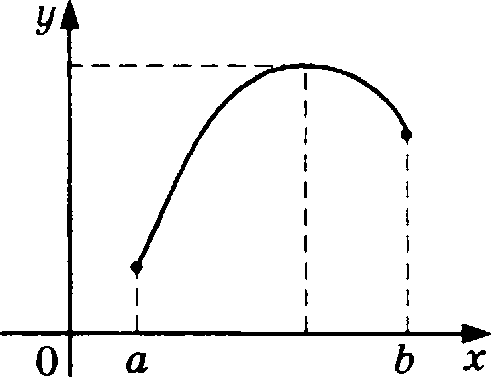
резке.

1. Следует вычислить производную функции /'(т) .
2. Нужно решить уравнение /'(т) = 0 , чтобы найти точки,

в которых касательная к графику горизонтальна.

1. Нужно вычислить и сравнить значения функции /(х) в

найденных точках и в концах отрезка. Наибольшее из чисел — наибольшее значение функции, наименьшее число — наименьшее значение функции на изучаемом отрезке. Наибольшее значение может быть в точке мак- симум слева или справа.



На рисунке показаны три возможных случая расположе- ние наибольшего значения непрерывной на отрезке функции.

*М puмep.* Найдите наименьшее значение функции. у — (т — 17)e\* ' 6 на отрезке **[15; 17].**

*Решение.* Найдем производную функции:

у' = *е"” +(х —* 17) *е"* " = (т —16) *е°* "

Производная обращается в ноль в единственной точке т = 16. Теперь еравним значения в концах отрезка и в найденной точке:

z = 15: *у = (—* 2 *е ' —*

z = **16:** у = (—1) *е’* = —1;

х = 17: д = 0 е = 0.

*Ответ:* —1.

2 - —0, 74;

е



Задача 32B. Найдите наибольшее значение функции

д-Т 2cosm+Tm-  + 9 на отрезке 0; 2

Задача 329. Найдите наименьшее значение функции

у — 3z — ln(z + 2)"

на отрезке [—1,5; 0).

Первообразная и площадь криволмнейной трапеции Функция, для которой /(т) является производной, назы-

вается первообразной для функции /(т) . Часто первообраз-

ную обозначают той же буквой, что и саму функцию, но дела- ют ее заглавной. Например, *F(х) —* привычное обозначение

оервообразной для функции /(т) .

*F'(х) - ¿(х)* .

Если у функции есть первообразная, то у нее бесконечно много первообразных, все они отличаются друг от друга на ка- кое-то число. Налример, если *F(х) —* первообразная для /(х) ,

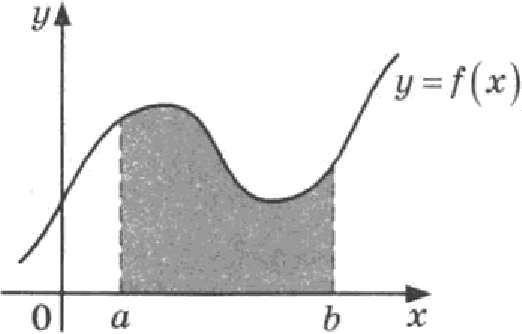
то и *F(х)+*1 и *F(т)* — 10 — тоже первообразные для f(т).

Крнволивейвая трапеция. Так называют фигуру, которая ограничена графиком некоторой функции и осью абсцисс на некотором отрезке (см. рис. о).

Формула Ньютояа-Лейбница связывает площадь криво- линейной трапеции и первообразную. Если криволинейная трапеция образована графиком функции /(т) на отрезке

$n; h) , то площадь этой трапеции равна *F(д) — F(а) ,* где

*F(х) —* какая-то из первообразных для функции /(т):

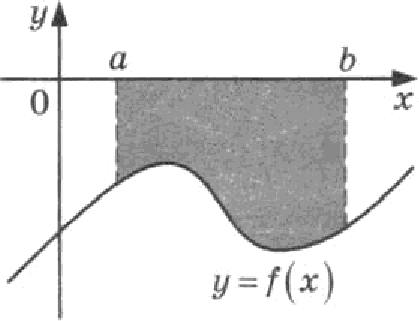
\*(\*J—\*1°)

Нужно учесть, что площадь при этом вычисляется «с уче- том знака › функции /(z) . То есть если /(т) 0 на всем отрез-

ке, то выражение *F(b)— F(а)* будет действительно равняться площади (рис. о). Если f(т) 0 , то Ј(6) Ј о) даст значение

площади со знаком минус (рис. d).

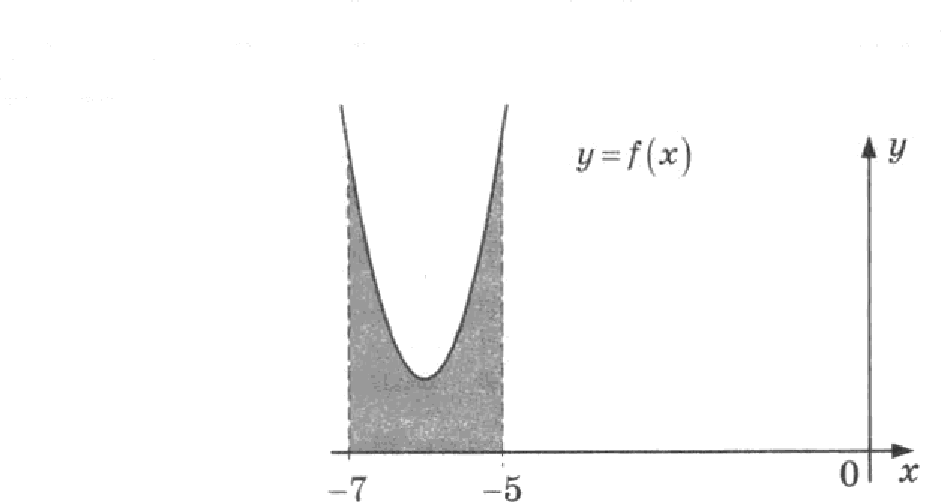
*F(b)— F(а)- —Е*



*6)*

Поэтому при вычислении площадей с помощькі формулы Ньютона-Лейбница нужно представлять себе расположение трапеции и пользоваться формулой внимательно.

*Пример.* Ни рисунке изображен график некоторой функции р = /'(z ), доля которой функция *F(x) —— х’ +* 18a’ + 109a — 2

одна из первообразных. Найдите площадь закрашенной фигуры.

*Решение.* Искомая площадь равна

*F* (—6) — f(—7) (—5)‘ + 18 -(—5 )2 +

+ 1O9 ( —5 ) — 2 — $(— Т)" + 18 - (—T)2 + 109 (— Т) — 2$ =

= —5-' +18 5‘ — 109 5 — 2 + 73 —18 - 7' + 109 7 + 2 =

= —125 + 343 — 18 (49 — 25)+ 109 (7 — 5)

— —125 + 343 — 432 + 218 = 4.

*Ответ:* 4.

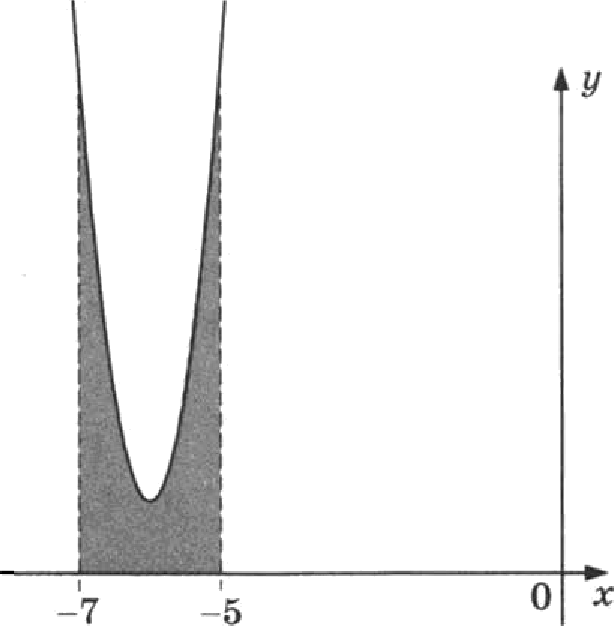
226

Задача **330.** На рисунке иоображен график некоторой функции

у = /'(z), для которой функции *F(x) ——* 2z' + **3632** + 217a — —

4

одна из первообразных. Найдите площадь закрашенной

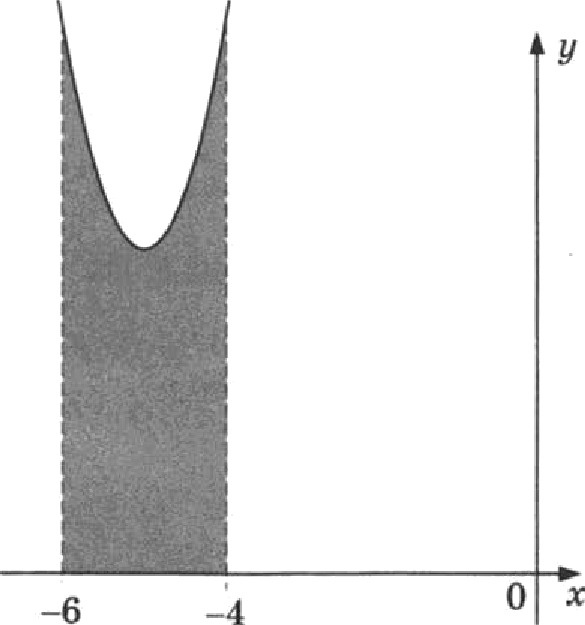
ф-•• p=

Задача **331.** На рисунке изображен график некоторой функции

у = Ј’(z), для которой функции *F(x) ——* z 3 + 16a’ + 803 — —1

2

одпа ио первообразных. Найдите площадь оакрашенной фи-



#### 22Т