**ТЕОРЕТНМЕСК ИЙ ИУРС**

1. ВЫРАЖЕННЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
   1. Корень степени л

О п р е д е л е н и е . *Арифметический корень* из неотрица- тельного числа *а* в-й степени есть такое иисло *b, чхо b‘ —— а,* при- чем п, b й 0, в е Н .

Арифметический корень в-й степени из неотрицательного числа *а* обозначают *ја .*

Число *а* при этом называют *подкоренным выражением.*

Арифметический корень второй степени также называют *квадратным корнем* и пишут *ја* вместо *ја .* Арифметиче- ский корень третьей степени также называют *кубическим корнем.*

Для любого нечетного натурального числа 2k + i уравне-

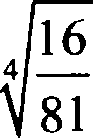
ние т" “ ' = *а* при *а <* 0 имеет единственный корень, причем отрицательный. Это число т называют *корнем нечетной степени* 2k + i пз *отрицательного числа а* и обозначают, как и арифметический корень, символом *” ја .*

Пример 1. Найти арифметический корень 4-й степени из числа: 0; i; 16; 16 256 , 0,0016.

81 625

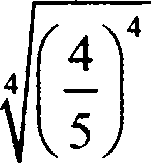
Решение: По определению арифметический корень 4-й степени из неотрицательного числа это такое неотрица- тельное число, четвертая степень которого равняется исход- ному числу. С учетом этого определения имеем:

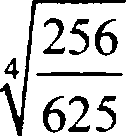
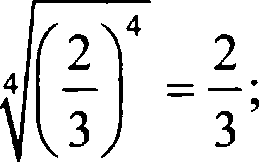
= 0; = 1; 4 = 4 = 2;

4 1—6

4 256 \_ 4

4

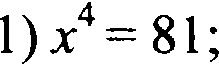
4 \_4

81 625 5 5

0,30016 = (024), = 0, 2.

О т в е т : 0, 1, 2, ;4 ; 0, 2.

**Пример 2.** Решить уравнение:

 2) *х’ = —*

l 32’

3) 5 = —160;

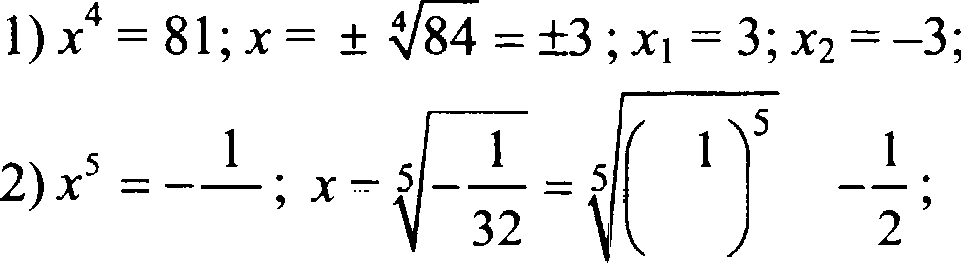
**Решение:**

4) 2х6 = 128.

В данном примере решениями уравнения четной степени являются два противоположных числа, равных соответственно арифметическому корню данной четной степени из исходного числа и числу, противоположному данному арифметическому корню.

Решением уравнения нечетной степени с отрицательной правой частью является корень данной нечетной степени из данного отрицательного числа.

С учетом вышесказанного решим данные уравнения:

32 32 2

3) 5s’ = —160; т’ ———32; х = —332 — —2;

4) 2x6 = 128; 6 = 64; = + 6 — U; = 2, = —2.

О т в е т : 1) 3, —3;

3) —2;

2)

2

4) 2, —2.

**Свойства арнфметического корня**

Во всех приводимых ниже свойствах предполагается, что *а, b, с в , а, b* й 0, с > 0; m, k, п е Н .

9

*СвоЕжво I ab —— дa ЛЬ .*

**Пример 3.** Вычислить:

i) ' 343 0,125;

2) ' 864 216;

3) 25-6

0, 0081;

4)-'132 30000.

Решение: С учетом свойства i арифметического коріія имеем:

 ' 343 0,125 = ' 7 - (0, 5) — = 7 - 0,5;

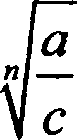
2) ' 864 216 = ' 3' 2 2' 3' = 3' - 2'- = 9 4 =

= 36 ;

3) 256 0, 008 l = 2(80,3) = 2' 0,3 = 4 0,3 = 1, 2;

4) 133-200000 = 2 10’ = 2 10 = 20.

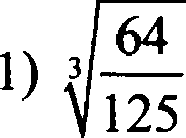
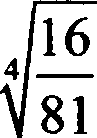
О т в е т : i) 3,5; 2) 36 ; 3) 1,2; 4) 20.

d

Свонство 2. • — =

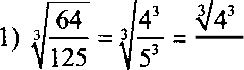
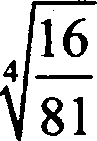
с

**Пример 4.** Вычислить:

, 2) 4 16

125 81

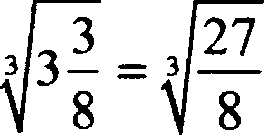
Решенне: С учетом свойства 2 арифметического корня имеем:

2) 4 16  2

125 5' 5

— — — —

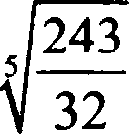
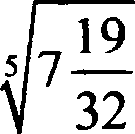
81 3

27 3

2'

4) 7

5 **243\_ 3**

32 32 2

О т в е т : i) 4

5

2) 2

3'

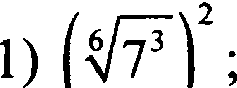
2 4) 3

з' 2’



*СаоТжво* 3. *—— !Г«)°.*

Пример 5. Вычислить:



#### 2) ('%)'.

Решение: С учетом свойства 3 арифметического корня имеем:

1) 6 ' = 6 = 7;

2) ('%)' = % ' — l = 2;

О т в е т : 1) 7; 2) 2.

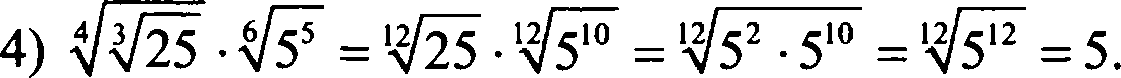
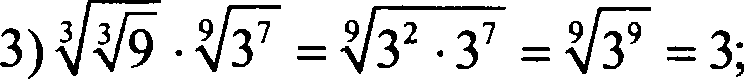
Свойство 4. *“ја* .

**Прнмер 6.** Вычислить:

1) 3729; 2) 1024 ;

3) - %; 4) 4 6.

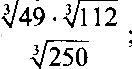
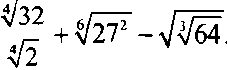
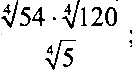
Решение: С учетом свойства 4 арифметического корня имеем:

1) ' 729 = 6 = 3; 2) 1024 = 4 = 4 2 -22 = 2;

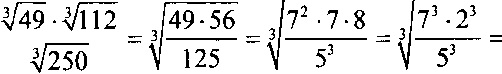
О т в е т : 1) 3; 2) 4 2;

3) 3; 4) 5.

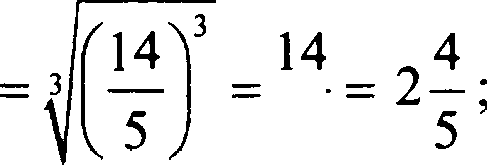
**Прнмер 7.** Вычислить:

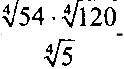
 2) 

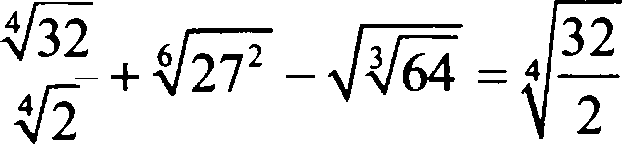
11

Решение: В данном примере применяются свойства 1, 2 и 3 одновременно. В первую очередь применяем свойства 1 и 2, далее преобразуем подкоренное выражение, а затем применяем свойство 3 арифметического корня. С учетом вышесказанного решим данный пример:

l)



2) = 54 24 = -3227 8 - 3 = 4 2 - 3’ = 2 3 = 6 ;



= 2 + 1 = 3.

32 + 3 — % = + 3 — 2 =

2

О т в е т : 1) 2 4—; 2) 6; 3) 3.

**Пример 8.** Упростить выражение

1) *-* 43a *b-* 237b ; 2) *- a’b’-c ;*

## 

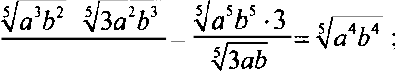
3ab

## ' 8‹ , -;4‹',

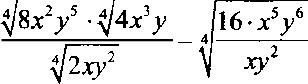
4)

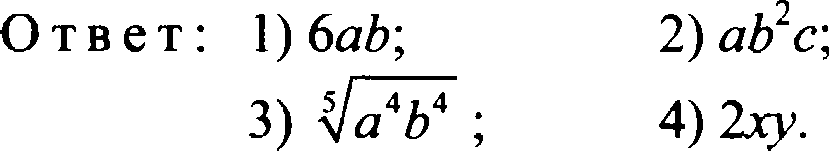
Решение: Данный пример — на тождественные преобра- зования иррациональных выражений. В нем применяются все свойства арифметического корня.

i) 2аЬ*-* 4a 2 b*-* 237b = ' *a*-'*2'b'* 3'= 2 - 3 - *ab* ——*6ab* ,

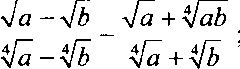
2) *abc а Ь2 с- b с’ -— a’b’c’ —— ab с ;*

3ab

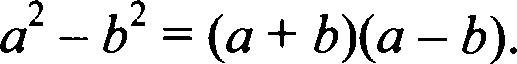
4) = *бх у’* — 2щ .



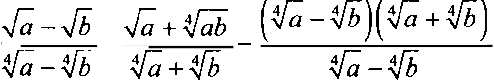
**Пример 9.** Упростить выражение:

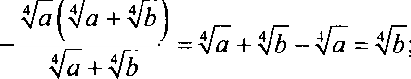
2) *а — b + а + b ја - Ь ја +*

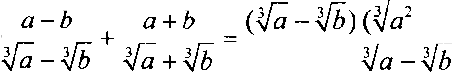
**Решение:** Этот пример — также на тождественные преоб- разования иррациональных выражений. Но отличие его от примера 8 в том, что в данном примере применяются формулы сокращенного умножения, а именно:

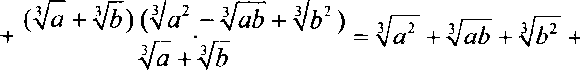
*а’ + b’ —— а + b)(а ab + bz ),‘*

С учетом этого преобразуем данные ирраіщональные вы- ражения.



2) *+ ab +*



+ *ab + Ь —* 2 + 233- *——* 2 ( + ) .

О т в е т : I ) *ЛЬ ,* 2) 2 +

* 1. **Степень** с **рациональным показателем**

О п р е д е л е н и е . Пусть m — целое, п — натуральное,

*а* > 0, тогда *а —— дa ,* если *а ——* 0, то *а* ——0 (m е Н).

Пример 1. Вычислить:

I l

1) 64° ; 2) 27' ; 3) 8 ;

4) 81’ ; 5) 1630,753 6) 9 " .

Решение: С учетом определения степени с рацнональным показателем имеем:

1) 64° = 6 = 8 ;



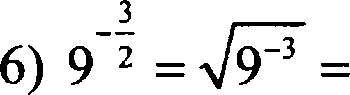
3) 8' = = 4 ;

5) 16° = — 1 1

2"8'

2) 27' = = 3 ;

4) 81 = = 3' — 27 ;

 1 1

33 27

О т в е т : 1) 8;

2) 3;

3) 4;

4) 27;

 , 6)

8 27

Свойства степени с рациональным показателем

Приведенные ниже свойства верны при *а, b е , а, b* 0;

*р, q —* рациональные числа. Свойство 1. *&а* - х . **Пример 2.** Вычислить:

1) 2' 2 ; 2) 5’ 57 .

Решение: С учетом свойства l степени с рациональным показателем имеем:

1) 2-'

2 ' = 2 ' — 2' = 8; 2) 5-'

5' = 5.

О т в е т : 1) 8; 2) 5.

Свовство 2. *а’ = а"’ .*

Пример 3. Вычислить:

1) 93 : 9\* ; 2) 4' : 4‘ .

Решение: С учетом свойства 2 степени с рациональным показателем имеем:

1) 9' : 9‘ = 9' = 92 — 3; 2) 4\* : 46 —

2'

О т в е т : 1) 3;

свойство з. («°)° = «°°.

Пример 4. Вычислить:

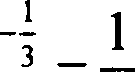
l ) (7 -з )°ј Ј

2) .

i

2) 81

Решение: С учетом свойства 3 степени с рациональным показателем имеем:

2

l) $7" ) ' = 72 — 49 ;

О т в е т : 1) 49;

*СеоАшво 4. ab)’ -— а b ,*

Прнмер 5. Вычислить:

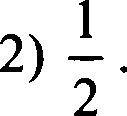
i -Ю,75 i т

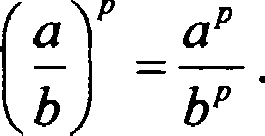
16  + 8  '



2) 8' 2 = 8

2





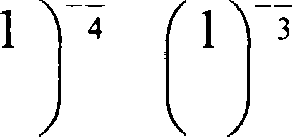


2) (0, 04)°"’ —(0,125) ;

\_і " i

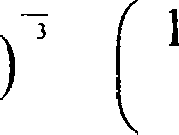
4) 5 ' + ДО, 2)•

Решенне: С учетом свойства 3 и свойства 4 степени с ра- циональным показателем имеем:

 — + —

16 8

= 2' + 2’ = 8 + 16 = 24 ;

2) (0, 04) (0,125

= 5' — 2' = 125 — 4 = 121;

' — — ' = 25' — 8' = 25 8



3) 8’ : 8’ — 3’ 3’ = 8 — 32 = 8 — 9 = —1 ,

2 °’ 3

4) 5 + (0, 2)• = 52 + = 25 + 125 = 150.

5

О т в е т : l) 24; 2) 121; 3) —1; 4) 150.

Пример 6. Вычислить:

1) 2-' 3 ' — 3'- 2 ' - ;

2) 5’ : 24 — 2’ : 5’ - 1% .

Решенне: Данный пример на применение всех свойств степени с рациональным показателем.

1) 2' 3- ' — 3' 2 ' = 2 - 3 ' $22 — зz )-;fi ;fi =



2) 5‘ : 2" — 2‘ : 5‘  l% - 5" 2 % \_

2‘ 5’

##### 5 -2

іо• = з.

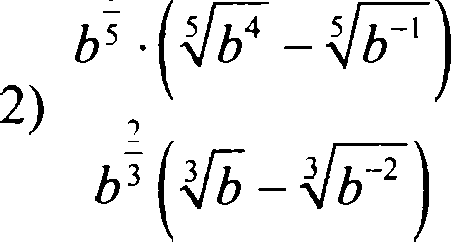
10‘

О т в е т : 1) —5;

2) 3.

Пример 7. Упростить выражение:

3

l *at’ (а ,’ + а )*

*а’ а* 4 *+ а*

Решение: Данный пример — на тождественные преобра- зования степенных выражений.

4 t 2 4 l 4 2

*а’ а +* п') *а'*

l )

i з i ' i

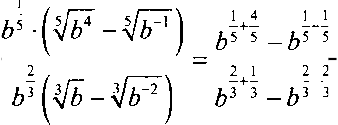
3+ *at“'* \_ *а + a2 \_ а(а +*



п + 1 *а +* l

) = *а* ;

*а* 4 *а’ + а* 4 *а’* 4 + *а* 4



О т в е т : l) *а, *

Пример 8. Упростить выражение:

*а — b а + b*



 *а + b а — b*



п 3 *— а'Ь°’* + b 3 п' + п'°Ь З + b '

*а а — b а' — b'*

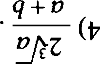


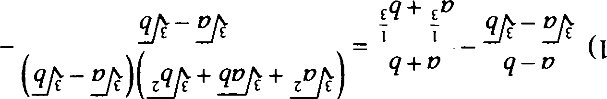
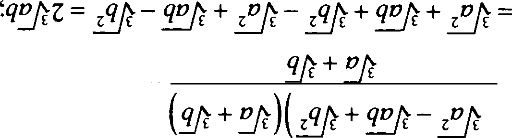
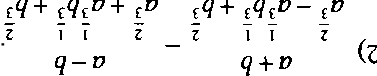
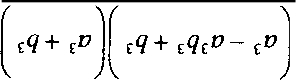
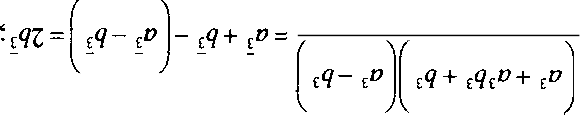
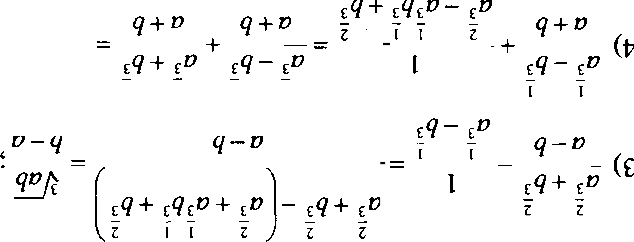
*а' — b*3

4) *а + b* + 2 I t 2

‹з 3 — ‹з' b' + b 3

Решение: Данный пример — также на тождественные преобразования степенных выражений, но в отличие от при-

*Hz ’- ‹q z Hz ’- q• , z (ı* ‹aazo





* 1. NorapaQu

O ri p e ri e ri e H e . HycTs *a* > 0, ri z 1, *b* > 0, Torna ypaBHe- Hee *a —— b* ueeT ep **HcTBeH** bin xopeHs. OH HaasiaaeTcz *cora- puQMOM mesa b no ociioaaiium a* o6o3HauaeTcz logo.

Hpuuep 1. Bhiu cm **The**

1) log216; 2) log264; 3) log22; 4) log2 l. Peuieuue: flo onpeneneH io norap Qua been:

1) 2'°íI ' 6 = 16 = 2’ log, 16 = 4 ;

2) 2'•g'° = 64 = 26 =r log, 64 = 6 ;

3) 2l°íI' ' = 2 = 2' =r log, 2 = l ,

4) 2'°íI' ' = 1 = 2' log, 1 = 0.

OT a e T : 1) 4; 2) 6; 3) 1; 4) 0.

Caoüczaa norapn§iuoa

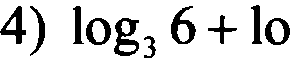
Caoiiczao 1. Hyczc *a* > 0, *b* > 0, c > 0, *a4* l.

Torna BepHo paBeHcTBO log,b + log,c = log,bc.

Hpuuep 2. Bbr•i cm Th:

1) log„ 5 + log„ 2 ;

2) log„ 8 + loc a. 125 ;

3) log„ 2 + log„ 72 ; g3 3

2

Peuieuue: HCnous3yz caoiiCTBO 1 norapuQuoa, peiii u paH-

HbIii up Cep:

1) log„ 5 + log„ 2 — log„ 5 - 2 = l ;

2) log„ 8 + 1og„ 125 = log„

-8 125 = log„ 103 — 3 ;

3) log„ 2 + log„ 72 = log„ -2 72 = loca 12' = 2 ;

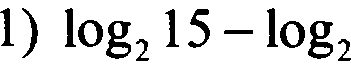
4) lOg3 6 + log3 3 = loa3 6 3 = log, 3' = 2 .

2 2

OT B e T : 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 2.

Caoñcvao 2. HycTs *a* > 0, *b* > 0, c > 0, *a 7* 1, Toma Bep o lo *b* — log„c = log,

Hpuuep 3. BhIuucn zs:

15

16

3) log, 54 — log, 2 ;

3 3

2) log, 75 — log, 3 ;

4) log, — log, 32 .

Peuieuue: HCnons3ys **cBOiiCTBO** 2 norapuQuOB, peinar par-

Hhiii npHMep:

íá  16 

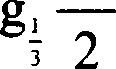
1) log, 15 — lo

15 = log, 15 : 15

= log, 2‘ = 4 ;

2) log, 75 — log, 3 = lo 75 = log, 5' = 2 ;

g 3

3) log, 54 — logo 2 = lo 54 = log'- -'=—3;

1 1 3

4) lo

iá — logg 32 = glo 16.32 = log, 8°’ = —3 .

O z B e T : 1) 4; 2) 2; 3) —3; 4) —3.

Свойство 3. НусТь р > 0, *b* > 0, *а* 1. Torдa для любого с

сущесТВуеТ loЩf›‘ и BepHo paBeHcTBO clog,b = lo I›‘.

Hpuuep 4. BhIHHCJIHTb l

1) log„ ; 2) log„ ;

1. log, ;
2. lo'

l

«w’

Peiueiiue: I4cnons3yz cBOiiCTBO 3 norap t§MOB, peui M ,uaH- HbIii up Mep:

1) log„ = log„ 13 —2 log„ 13 = 2

5 5’

1. log„ = log„ 11

— log„ 1 l = 2

3 3’

1. logo = lo I

—— lo 31



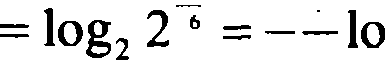
—141

1. log 1

'::i%

O T B e T : 1)

g'3-'

7

6

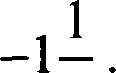
2) 2

3'

4

g, 2 = 

6

3) —14 ; 4) 

6

Свойство 4. ПусТь сущесТВуеТ log,b. Torдa для любого

log, b

c > 0, c z 1 BepHo paBeiicTBO log,b

log, n

Flj3H *b —— C* OTcxina B

uacTHOGTii cuenyer: lO *b* =

1 log, *a“*

Hpiiuep 5. Bhiu cu Th:

 log, 8

lord 16

3) log, 36 — log, 12

log, 9

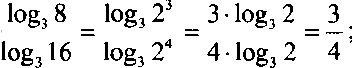
2) log, 27

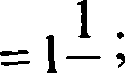
log, 9

4) log, 8

lord. — log, 30

Peuieiiue: Hcnous3ys **cBOiiGTBO** 4 uorapii‹i§MOB, peiuiiM paH- Hhlii npuMep:

1) 

2) log, 27 \_ log, 33 \_ 3log, 3 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| log, 9 log, 32 |  | 2 log, 3 | 2 2 |
| log, 36 — log, lz |  | 36  lg p 12 | 3 |
| log, 9 |  | log, 3' | 2log, 3 2 |

3 log,

\_ 1 .

4) log 8 \_ log, 2' \_ 3 log 2 \_ 3 - log, 2 =-3.

log 15 — log, 30

log

15 log, 2‘i —-1

' 3

log 2

OT a e T : l) 3 2) 

4 2

 , 4) —3.

2

Caoiicrao 5. OCHOB oe uorapHQMH•iecxoe rompeczao:

*a' °’ ——b .*

**Hpuuep 6. BhlYHGJlHTb:**

1

1) 2 , 2)

log, 18 —1 log, 72

log, 14 — 1 log, 56

log, 30 — log, 150

2

PeuieHue: Qxx peiue us pa oro npHMepa eo6xO,qxMO xc-

nons3oBaTs Bce cBoiicTBa norapHQMOB.

logz 24

logz 72

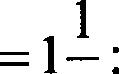
?i lord 24

 2 \_ logz 24 — log, J

J?i \_

log, 18 — log, 72 log, 18 — log, l'o 77?

18

logo 2 \_ 2 log 2 \_ 9

log, 3 4 log, 3 8 8

log, 14

2)

56 log, 14 — log,

l g7 14

 '%

log6

30 — 1 log 150 log, 30 — log, l lo

2

Jí3s0á

log,

, 2

\_ - log, 7

7' y

—

.

= =



— 1

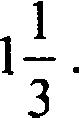
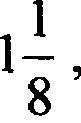
4 l

l—

log6 6'

log, 6 ' 3

2

O r B e r : l) 2)

**Hpiiuep 7.** Bsi•i cniiza:

l ) 3 6' ' + l 01— lO@¡q

'

— 8' ' ' ;

2) 81 '"\* 4 + 25'°""' 49"" '.

Решение: Q,nя решенхя данного примера необходимо ис- пользоВаТь Все сВойсТВа логариQмоВ, а Тахже оснОВное лora- риQмическое Тождество.

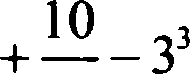
1) 36g'• ' 5 + 10 ••" ' —8gl•

= (6'••5 )' + 10

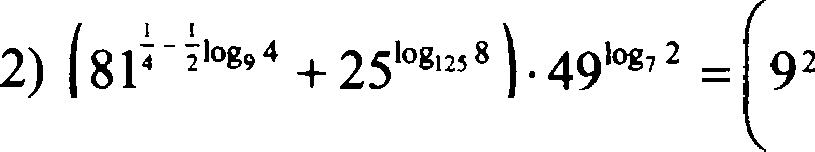
## io'°g" "

### (2'•g )' =

= 5'

 = 25 + 5 — 27 = 3 ;

2

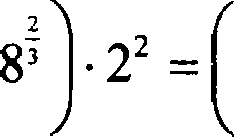
-- logy 4 +(125'•g )' .

х (7 log 2 )'

3

## 9'°g"

3

—3-

4

4 4 = 3 + 16 = 19.

ОТ В е Т : 1) 3; 2) 19.

**Пример** 8. ВhІ]ЗаЗИТь через а Н *b:*

1. logp 50, если logJl5 = *а,* log 10 = *b;*
2. lo 1250, если logz5 = а.

**Ревіение:** В данном примере необхОдиМО Выразить лora- ритм числа по одному осноВанию через даниьІе логариQмы дpyгoro числа по другому осноВанию. ,f{ля 3TOro нужно, иС- пользуя сВОйства логариQмОВ, преобразоваТь логариQм по одному осноВанию к логариQму по другому основанию, зна- чеііііе кoTOpom **дано. YчИThIBiilI** Вышесказаііііое, решИМ ЗТОТ пример:

1) log 50 = log , 50 = 2log, 50 = 2(log, 5 + log, 10) =

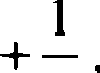
= 2(log, 3 + log, 5 + log, 10 —1) = 2(log, 15 + log, 10 —1) = 2(n + *b* -1);

2) log4 1250 = log , (5’ - 2)

— ‘lo g, 5 4 + log, 2) =

2

= 2log, 5

*=* 2a 

2 2

ОТ В е Т : 1) 2(n + *b —* 1); 2) 2s + 2

Десятичные и натуральные логари9мы

О п р е д е л е н и е . *Десятичный логарифм* числа — это логарифм этого числа по основанию 10.

Qесятичный логарифм числа *b* обозначается lg *Ь.*

О п р е д е л е н и е . *Натуральный логарифм* числа это логарифм этого числа по основанию е, где *е —* иррациональ- ное число, определяемое следующим образом:

*е —— *

Приближенное значение числа *е ==* 2,7182818. Натуральный логарифм числа *b* обозначается ln *Ь.*

**Пример** 9. Qaнo: 193 = m, 195 = п. Найти: log 30.

Решение: ,f{aнный пример аналогичен предьціуіиему с тем лишь отличием, что известнмми являются значения десятич- ного логарифма.

log„ 30 = lo 10 = lg 3+ lg10 \_ lg 3 + 1 \_ m + l

ve. \* + g .

lg 15 lg15 lg 3 + lg 5 m + п

О т в е т : +

m + п

Пример 10. Выразить данный логарифм через натураль- ный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

l) log75; 2) logglb; 3) logo,79; 4) log„i0,23.

Решение: Данный пример полностью аналогичен преды- дущему с тем лишь отличием, что нужно преобразовать лога- рифм к натуральному и при решении необходимо использо- вать микрокалькулятор.

l ) log 5 \_ ln 5

ln 7

—0,83 ; 2) logg l ' l ll 3 ;

3) log 9 = ln 9 = —6,16 ; 4) lo ve . 0, 23 = **30,23** < —15, 42.

ln 0,7 ln1,1

О т в е т: I) Ю,83; 2) 1,3; 3) Ю,16; 4) —I 5,42.

* 1. **Сннус, косннус, тангенс, котангенс**

Рассмотрим круг с центром в О(0; 0) и радиусом 1. Для любо- m п е IR можно провести радиус *OA* так, что радианная мера угла между *OA н* осью *Ох* равна *а.* Положительным считается направление против часовой стрелки. Пусть конец радиуса *А* имеет координаты *(а, b).*

*А(а,’ b)*

*A’(a; b)*

О п р е д е л е н и е . Число *b,* равное ординате конца еди- ніічного радиуса, построенного описанным способом, называ- ется *синусом* числа п и обозначается sin п.

О п р е д е л е н и е . Число п, равное абсциссе конца еди- ничного радиуса, построенного описаннъІм способом, называ- ется *косинусом* числа п и обозначается cos п.

О п ре д е л е н и е. 'lисло tg п Sin С£ называется *таигенсом*

числа п.

О п р е д е л е н и е . Число ctgn = 

*генсом* числа п.

Пример 1. Вычислить:

**SlП** )ЈІ — **COS** 2 ’

1. cos 0 — cos 3s + cos 3,5a .

Решение: Этот пример использует определение синуса и косинуса угла через координаты конца единичного радиуса в единичной окружности. Для более наглядного представления вам необходимо нарисовать единичную окружность и отло-

жить на ней соответствующие точки, а затем посчитать их абсциссы для вьlчисления косинуса и ординаты для вычисле- ния синуса.

1) sin 3s — cos 2 = 0 — 0 = 0 ;

2) cos 0 — cos 3s + cos 3,5a = 1 — (—1) + 0 = 2 .

О т в е т : 1) 0; 2) 2.

Нример 2. Вычислить:

* 1. tgn + cosп ; 2) tg0‘ — tg180° .

Решение: Этот пример аналогичен предыдущему; для вы- числения тангенса угла нужно поделить ординату точки на ее абсцнссу.

i) tgк + cosп = 0 — i = —i ; 2) tg0° — tgl 80° = 0 — 0 = 0.

Ответ: l) —1; 2) 0.

Основное трвгонометрическое тождество

Qля любого угла п справедливо siп2n + 

Из основного тригонометрического тождества следуют за- висимости между синусом и косинусом одного угла:

GO' SO

* SIП' О ; SI'ПO
* GOS' О .

Нрнмер 3. Какие значения может принимать:

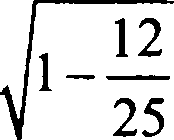
* + 1. cosп, если sin п = 23 , 2) sin п, если cosn = — i ;

5

3) siпп, если cosп = 2 , 4) cosп, если sin п = — .

Решенпе: Этот пример — на использование основного тригонометрического тождества, а точнее на использованне следующих нз него зависимостей между синусом н косннусом одного угла.

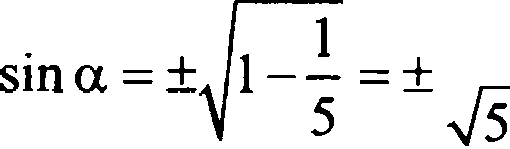
1. Найдем cos ‹х, если sin ‹х =

cos п = i — 12 1

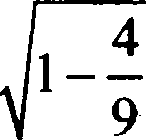
25— 5 '

1. Найдем sin ‹х, если cos‹х = — 1 .

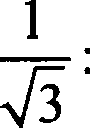
5

2

1. Найдем siп ‹х, если cos‹х = 2

п ‹х —4 +“

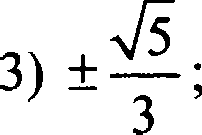
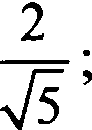
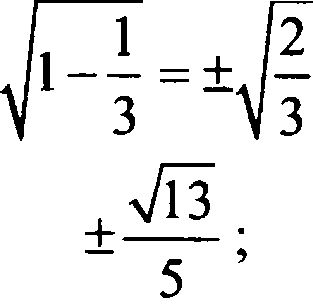
9 3

1. Найдем cos ‹х, если sin ‹х = —

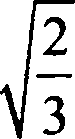
**GOS Ct** == :і: 1 —

О т в е т : 1)

2

2) i

4) 1 2

3

Соотношение между тангенсом и котангенсом одного ap-

гумента: tg‹x ctgn = 

GOS О SIП О

Соотношение между тангенсом и косинусом одного apгy-

мента: cos2‹x =

2

i + tg п

при ‹х х

2

Соотношение между котангенсом и синусом одного apгy-

мента: sin2‹x = 

Qpyгиe соотношения между тригонометрическими функ- циями одного аргумента:

ctg2cz

1 + ctg'cr

при ‹х ru, л е Н ;

sin2n — tg'n

1 + tg2‹x

Hpuuep 4. Bhiu cn Th:

— + un .

2

1. sin n, tg n,ctg ix , ecn cos n

1 2

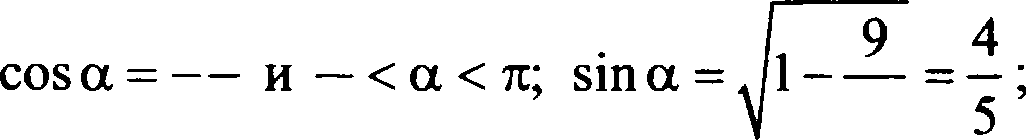
2 3x

1. cos ‹x, tg n, ctg ‹x , ecn sin n = —— x < o <

1 2

**Peuieuue: B pilHHOM Hp** Mepe eo6xOJJHMO cnonaaoBava cOOTHoiueiiiis Merry BceMii +piiroHoMe+piiuecxuMii **QyHxuHIIMH** OnHoro apryneriza.

1. HaiiT sin ‹x, tg ix,ctg n , ecos

3

5 2 25

4

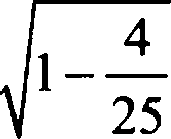
tg n = sin n \_ 5 \_ 4 cos n 3 3

5

ctg = 1 \_ 3

tg ix 4

1. HaiiT Cos n, tg n, ctg n , ecnii

sin n = 2 x < o < 3 ; cosa = — 1 4 = — 2 ;

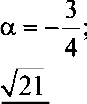
——

——

5 2 25 5

tg \_ sin ix \_ 2 ; ctg n = cos ix 2



tgn 2

OT B e T : 1) sin ix = 4

5

4

g • 3

ctg

2) cos n = — ~~2~~  t

5

2 ctg n =

— 2 2

**Hpuuep 5.** MOFy+ cx **opiiOBpeMeHiio** Bslnoniiazscs paBeiiczBa:

5 g°—~~2~~

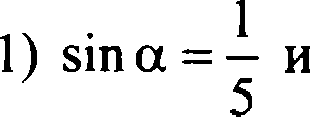
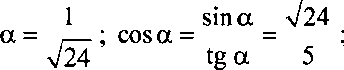
1) sin n = — t

2) ctg

5

cos n — — ?

4

Решенне: В данном примере необходимо использовать за- висимости между тригонометрическими функциями одного аргумента, а в качестве проверки, может или не может выпол- няться данное условие, проверЯть основное тригонометриче- ское тождество.

tg

siп' п + cos' п = 1 — верно, значит, может.

2) ctg п 7 И **GOS** О 15

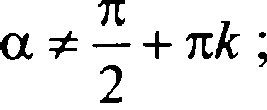
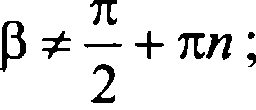
= —9 + 225 = 288 z 1 — значит, не может.

16 112 112

О т в е т : 1) может; 2) не может.

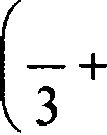
Формулы сложення cos(n + §) = cosncos§ + sinnsin§; siп(n + §) = sinncos§ + cosnsin§.

tgn + tg§

1 + tgntg§  

 —+  2

Прнмер 6. Вычислить

**GOS**

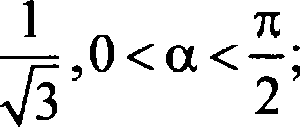
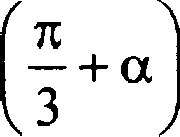
o , если sin п = , 0 < п <2 ,

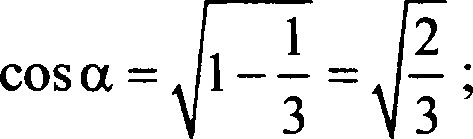
2) cos п —4 , если cosо — —

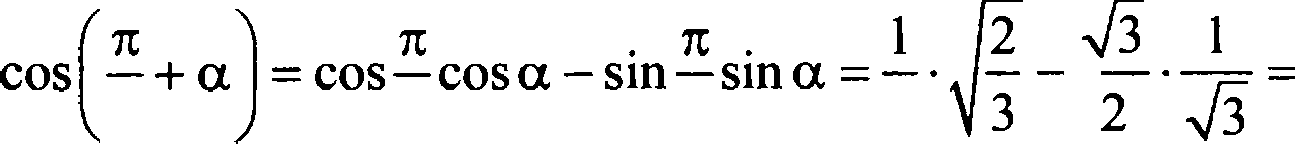
— < о < п .

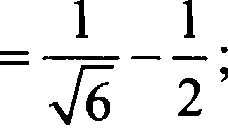
2

Решенне: Для решения этого примера необходимо исполь- зовать зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента, а затем применять формулы сложения.

1. Найти cos , если sinn =



3 3 3 2 3



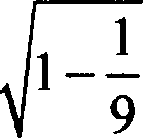
1. Найти cos п —

4

, если cos п

1 <

3 2< <

siп п = 1 1 22 ,

=

——

9 3

4 4 4

\_ 1 2 22 2 \_ 2 2 4 — 2

3 2 + 3 2 6 + 3 6

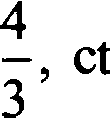
О т в е т : 1)  ~~6~~  —

2

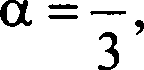
, 2) 4 — 2

6

Нример 7. Вычислить: ctg(n §), если ctg п =

g § = —l .

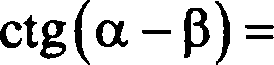
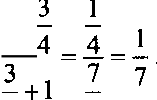
Решение: В этом примере используется зависимость меж- ду тангенсом и котангенсом одного аргумента, а также фор- мулы сложения для тангенса.

Найти ctg(n — §), если ctg 4

tg п = 3 , tg

4

ctg § = — l ;

 1 1 + tgntg§ \_ 1

tg(n —§) tgix — tg§

4 4



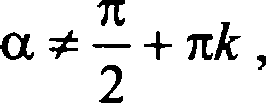
O T B e T :

7’

&opuynai naoiiuoro yrna

sin2n = 2sinncosn;

cos2n = cos2n — sin2ix = 1 — 2sin 2 n = 2cos2n — 1;

tg2n = 2tgo

I — tg'o

ctg2‹x = ctg’‹x — 1 , ‹x z

til

‹l;4--F

4 2

, *k* e E.

2ctgn 2

**Hpuuep** 8. Bsi•i cmizs sin 2‹x , ecn :

1) sin n = — H — < O < 4

—

—

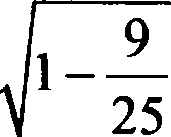
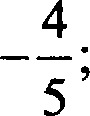
5 2 5

**H R<J<** 3x

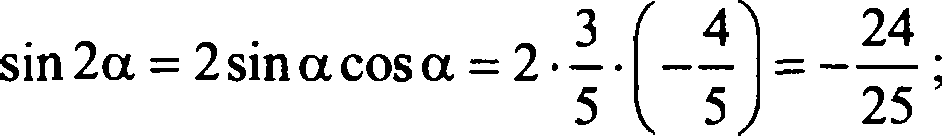
2

Peiuenue: Qax peuieHiis ,qa oro npxuepa eo6xopxuo npiiueueva coOTiiouieHus uempy zpiiroHOMeTpiiuecxuMii Qyux- uxxu o,q oro apryueHTa ‹jiopuynsi qaoiiHOro yrna.

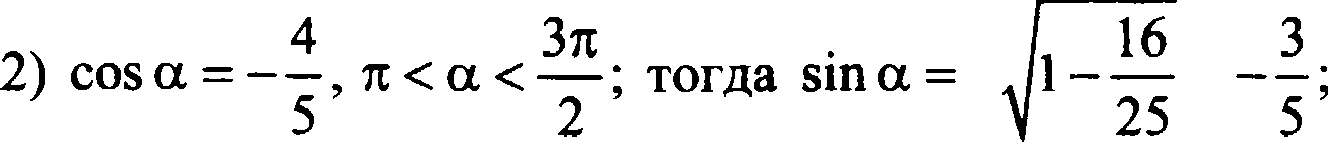
1) flo ycnoBux› sin ‹x —

TOrna **GOS Ct** = — 1 — =

25



— 1 — 16 =

25

sin 2ct = 2sin n cos n = 2 — 3 4 24

5 5 25

O T B e T : 1) — 24 24

**Hpuuep 9. BbI'4HCJIHTs** Cos2n, ecnH:

cos n = 4 ;

sin n = 3

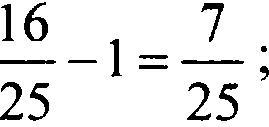
5

.

——

Peuieuue: DTOT np uep Tonsxo va cnonsaoBa e pop- ryu nix xoc yca pBoii oro yrna.

1. cos n = 4 ;

cos 2s = cos' ri — sin' ri = 2 cos2 ri — 1 = 2

1. sin n = ——;

cos 2s = cos' ri — sin' ri = 1 — 2sin' ri = 1 — 2

9 \_ 7

25 25

O T B e T : 1)

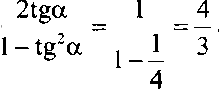
7

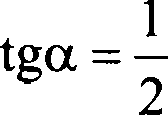
21’

2) 7

25

**Hpuuep 10. BbI'4HCJIHTs** tg 2s, ecn tg n = 0,5.

Peiueuiie: HpHuep — va Hcnons3oBa He Qopuynsi Ta re ca QBOii oro yrna.

 — Toma tg2n =

O T B e T : 4

3

&opuynsi npuaeneuuu

1. sin(——n) = —sino; cos(——n) = cosa; tg(——n) = —tgn; ctg(——n) = ——ctgn.

DT QopMynsi **HO3BOJIsIOT Ha6aBnsTbCII OT** OTpiiuaTensrisix

**fOB.**

1. sin(n + 2un) = sinix; cos(n + 2un) = cos‹x, n e H; tg(ix + *en) ——* tgix; ctg(n + *en) ——* ctgn; *n e d.*

&opuynsi **HO3BOJ1xIOT Hs6aBiiTsCs oT** paccuovperiHll **JIOB,**

6onsui x 2s.

1. sin(ix + u) — —sin‹x; cos(n + u) = -—cos‹x; tg(n + u) = tgix; ctg(n + u) = ctgn.
2. sin K =cosa; cos K

—i

—i‹i

2 2

tg = +ctgn ; ctg

2” 2”

n  = +sin n ;

= +tg‹x .

**Hpiiuep 11.** Hcnonsays Qopuynsi npuBeneH z, **Bhiu** c-

**JIHTh**:

1) cosl50°; 2) sinl35°;

3) ctgl35°; 4) cosl20°;

5) cos225°; 6) sin2l0°;

7) ctg240°; 8) sin3l5°.

Peiueuue: QaHHaiii up rep nonpaayueBaez cnonssoBa e Qopuyn npuBe,4e rie.

1) cos150° = cos(180° — 30°) — —cos 30º = —

2

2) sin 135° = sin(90° + 45°) = cos 45º = Vü

2 '

3) ctgl35° = ctg(90° + 45°) = —tg45° = —1 ;

4) cos120° = cos(90° + 30°) = —sin 30º = — 1

2’

5) cos225° = cos(180° + 45°) = --cos45° = — 2 ;

6) sin2l0° = sin(180° + 30°) = —sin30° = —

2’

33

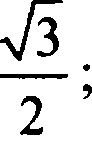
7) ctg240° = ctg(180° + 60°) = ctg60° = ;

8) sin3l5° = sin(270° + 45°) = —sin 45° = — 2

2

О т в е т : 1)

2) 2

2

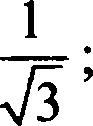
3) —1; 4) —

2'

5) 2

2

, 7)

2

8) 2

2

Нример 12. Доказать тождество:

22siп п— —

 4

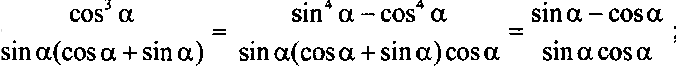
cos‹x(1 + ctgn) siп n(1 + tgn) siп 2s

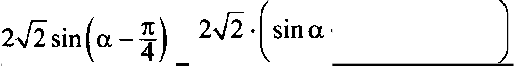
Решение: Данный пример — на тождественные преобра- зования тригонометрических выраженнй. Qля доказательства тождества пользуемся свойствами тригонометрических функ- ций, а также формулами сокраіиенного умножения.

22siп п——

 4

cosn(1 + ctg‹x) siп ix(1 + tgn) sin 2s

 siп' п \_ cos' п \_ siп' п cosn(1 + ctgn) sin ‹x(1 + tgn) cos n(sin п + cosп)

22

2 2

sin 2‹x 2sin п cos п

COS О



Јlевая и правая части совпадают — значит, тождество верно.

* 1. Прогрессии

**Арніјіметвческая прогрессня**

*О п* р е д е л е н и е . *Арифметическая прогрессия (AП)* числовая последовательность, такая, что кaждіяй ее илен равен предыдущему, сложенному с постоянным для всех членов прогрессии числом, называемьш *разностью* AП. AП задается первіям иленом и разностью.

Формула в-го члена AП: *а —— а + {п —* 1)d, где а — первый член AП, *d —* разность AП.

По определению

*а = ар + d=* •п-2 *+ 2d=...* = а, + (п — 1)d.

Если каждый член AП больше предыдуіиего, то прогрес- сия возрастающая, если меньше предыдущего, то убмвающая. У возрастающей AП: *d* > 0, у убывающей — *d <* 0.

Сумма в первмх членов AП равна:

Ј \_ (а, + а,)в \_ ( + а, *+{п -* I)d)п 2a, *+ п —* I)d 2 2 2

**Пример 1.** В арифметической прогрессии найти: 1) аі‹, если а, = 2, *d ——*3;

2) aio. если ai = 3, *d ——*4; 3) аі8. если а = —3, *d ——* —2; 4) aii, если а, = —2, *d ——--4.*

**Решение:** При решении данного примера мы пользуемся выражением для в-го илена арифметической прогрессии через i-й член, разность арифметической прогрессии и число в.

1) а, = а + (в — 1)d, в —— 15, поэтому

п , —— m + 14d — 2 + 14 3 = 2 + 42 = 44.

2) а, = а + (п — l)d, в ——20, тогда а2о = *а +* 19d; п2о = 3 + 19- 4 = 3 + 76 = 79.

3) а, = а + (п — 1)d, в = 18, тогда **a;g** — ‹U + 17d;

18' — 3 + 17 - (—2) — —37.



4) *а,* ——*ai* + Тв — 1)d, в ——11, тогда *ai i = а +* 10d;

*а ——* —2 + 1-0 (--4) = --42.

О т в е т : i) 44; 2) 79; 3) —37; 4) --42.

Нример 2. Найти сумму двенадцати первых членов ариф- метической прогрессии, если:

i) *а* —— —5, *d ——* 0,5; 2) *а —- d ——* —3.

2'

Ретевне: Qля решения данного примера пользуемся фор- мулой для суммы в членов арифметической прогрессии.

1) п —— —5; *d ——* 0,5; S, = 2a, *+ и -* I)d*р*

2

1. *а =*

2'

2.—+

1 - 0,5 12 = —27.

2

2

i i -(—3)

 2 12 = —192.

2

О т в е т : i) —27; 2) —192.

Нрнмер 3. Найти m и *d* арифметической прогрессии, если: i) *a7* = 21, 7 = 205;

2) *а ——* 92, 5' = 22.

Решенне:

i) *a7* = 21; 7 = 205.

Так как S, =

7пі = 263.

- 7, то 205 — *a* + 2 - 7; 410 = 7a + 147;

2 2

*'*

Тогда п, — 374 .

7

Так как n7 — m + 6d, то 21 = 37 4 +

7

6‹f; 6d= — 

7

*d —— —* 58

21

Итак, *d ——* —2 16 .

—

21

2) c i i = 92; S = 22.

Так как Ѕ„ = *a + а,* -11, то 22 = *а,* + 92 11; 44 = *а +* 92-)

*'*

11;

2

at + 92 = 4.

Тогда п —— —88.

Так как а,, = а + 10d, то 92 = —88 + 10d; 180 = 10d. І4так, *d=* 18.

О т в е т : l) 374 , —2 ; 2) —88, 18.

**Геометрнческая прогрессня**

*О п* р е д е л е н и е . *Геометрическая прогрессии (ГП) —* числовая последовательность, у которой первый илен отличен от нуля и каждый илен, начиная со второго, равен предьціу- щему, умноженному на постоянное для всех членов число, называемое *знаменателем q ГП.* ГП задается своим первым членом и знаменателем.

Формула в-го илена ГП: *b —— b- q"'*

По определению ГП: *b —— by q —— b* 2 q2 = *b- q"'.*

Если каждый член ГП больше предыдущего, то прогрес- сия возрастающая, если меньше, то убывающая.

Сумма п первых иленов ГП равна S, = *b q - b,* при q z 1.

q — I

С л е д с т в и е . S, = *b, q‘ —* 1) прн q z 1.

q — 1

ГП называется *бесконечно убывающей,* если qJ< 1.

Суммой бесконечно убывающей ГП называется число, к которому стремится сумма первых в членов ГП при в, стре—

мящемся х m. Это число равно: fi = *b,*

1 — q

**Пример 4.** Найти знаменатель геометрической пporpec- сии, если:

1) *by* ——2, *by ——* 162; 2) b- i —128, b7' —2;

3) *by ——* 3, b4= 81; 4) *be* - 250, by= —2.

**Решение:** Данный пример мы решаем, используя формулу в-го илена геометрической прогрессии.

1) *by ——* 2; *by -—* 162.

Так как b, —— b-i

q , то 162 = 2 q4; 81 = q ; 34 = q’,

поэтом У qi = 3, q2 = —3.

2) *b* ———128; *b7*' —2.

Так как *b7* = *b*-*i*

q6. то —2 = —12-8

q6 6



2

« 2 — 2

3) b- i 3; by = 81. з 3

Так как *by* = *b*-*i*

q , то 81 = 3 

= 27, поэтому q = 3;

4) bi - 250; b4' — 2.

Так как *b4* = *b-* qз, то —2 = 25-0

О т в е т : I) 33; 2)

2'

. \_ 1 1

— 325 •=- — «

4) i

5

**Пример 5.** Найти сумму семи первых иленов геометриче- ской прогрессии:

I) 5, 10, 20, ...;

2) 2, 6, 18, ... .

**Решение:** Решаем, используя формулу для суммы в пер- вых членов геометрической прогрессии.

(1 — q7

* 1. *b ——* 5; q = 2. Так как S, — *~~'~~* ~~)~~  то

1 — q

(I — 2' ' = —5(I — 128) = 635; I — 2

2) bi = 2; q = 3. Так как S, =

b,(l *- q*

*’)* то

l — q

S —' " 3 = 37 — i = 2187 — I = 2186.

’'

l — 3

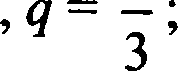
О т в е т : l) 635; 2) 2186.

**Прнмер** 6. Найти сумму бесконечно убывающей геомет- рической прогрессии:

l) 12, 4, 4

2) 100, —10, 1, .. . .

**Решение:** Решаем, используя формулу длв суммы беско- нечно убывающей геометрнческой прогрессии.

1) *b —-* 12 1

3 = 18 ;

1 — q l — 2

2) *b ——* 100, q = — 1

S = *b,*

S = 100 = 1000 10

10 i — q

О т в е т : l) 18; 2) 90 .

+ 1 11

10

90—

11

1. УРАВНЕННЯ И HEPABEHCTBA
   1. Равносильность уравнений

О п р е д е л е н и е . Уравнения7t•) *—— х)* и *р(х) —— h(x)* назы-

ваюзх;я *равносильными,* если совпадаіот множества их корней.

Теоремы о **равноснльностн ураввенвй**

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения прибавить од- но и то же выражение, которое имеет смысл при всех значени- ях неизвестного из области определению уравнения, то полу- чится уравнение, равносильное данному (в частности, если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части урав-

НО•НИІ1 В Д]3Щ G **Н]9ОТИВОНОЛОННhІМ ЗНПКОМ,** ТО **НОЛ ИTGI1**

уравнение, равносильное данному)..

Теорема 2. Если обе частн уравнения *f(х) ——g(х)* умно-

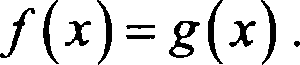
жить на выражение *h(x),* которое имеет смысл всюду в облас- ти определению уравнения *f(х) -— g(x)* и нигде в этой области

не обращается в 0, то получится уравнение, равносильное дан- ному.

Теорема 3. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 4. Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то при возведении обеих час- тей уравнения в четную степень получится уравнение, равно- сильное данному.

Теорема 5. Уравнение *af'!' ——а"" (а* > 0, п z 1) равносиль- но уравнению *f(х) g(х) .*

Теорема 6. Если *f(х)* >0 и *g(х)* > 0, то уравнение log, *f(х) ——*log, *g(х) (а* > 0, п z 1) равносильно уравнению

Нример 1. Придумайте три уравнения, равносильных уравнению:

1) 2т —1 = 3; 2) cosx = 3; 3) lgr2 = 4; 4) т’ — 1.

Решение: Используем определение равносильности урав- нений и теоремы о равносильности для составления уравне- ний, равносильных данным.

l) 2z — l = 3; *х —— 6,* 1) *бх ——* 25; 2) *х* = 1; 3) *х* 4 = 3;

2) cosx = 3; **решений нет;**

1) sinx = 5; 2) cosr = —3; 3) sinx = —10;

3) lgr2 = 4; z ——+100; 1) *xz —* 100a; 2) = 100; 3) JJ = 100;

3 1 1 1

4) z5 = l; *х ——* l; 1) х' = l; 2) *х’ ——* l; 3) 3 z" ——3.

**Пример 2.** Объясните, почему равносильны уравнения: l) *x37* — 12x2 + l = 0 и *хЗ* + 1 = 12x2;

2) *х’* — 2x — 3 = 2 и z 2 — 2x — 3 = 32.

Решение:

1) z3’ — 2+ l = 0 и *хЗ’* + i = 12x2.

Данные уравнения равносильны, так как перенос слагае- мого из одной части уравнения в другую со сменой знака не нарушает равносильности.

2) *x2* — 2x — 3 = 2 и *x2* — 2x — 3 = 32.

Данные уравнения равносильны, так как возведение обеих частей уравнения в нечетную степень не нарушает равносиль-

* 1. Общие приемы решения уравнений Метод разложення на множнтелн

Этот метод заключается в том, uтo уравнение7tх)g(х)/і(х) = 0

можно заменить совокупностью уравнений *9 x) ——* 0; *х) ——* 0;

*h х) ——* 0.

Решив уравнения совокупности, нужно взять только те решения, которые принадлежат области определения исход- ного уравнения, а остальные корни отбросить.

Метод замены перемевноіі

Этот метод заключается в том, что если уравнение7l=) ——0 сводится к уравнению *hЩx)) ——* 0, то нужно ввести новую ne- ремениую *и —— х),* затем решить уравнение *h{u) ——* 0, а в конце решить совокупность уравнений g(z = зі: Л‹) ' 2› -. •› g(z) = *и„* где *и* ..*.,u,* — корни уравнения *h{u) —-* 0.

**Использование свойств іЈіункцнй**

Нусть у нас имеется уравнение 7t= *——et•)-*

Если одна из функций возрастает, а другая убывает, то ис-

ходное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единст- венньйі корень, который иногда легко угадывается.

**Использование граQиков**

Суть меюда использования графиков для решения уравнения

*A•)——&•) •e•‹=•- •т• •‹•=P•›•••* mф- ф›••ar\* *——А•) •*

*у —— х)* и найти все точки m пересечения, абсцнссы коюрых и

будуг являться корнями нашет исходнот уравнения.

* 1. Решение уравнений

Нример 1. Ретите уравнение методом разложения на

1) 2" —4 —4 + 2" = 0; 2) 3° — 3"' + 27 = 9т.

**Решение:** Приведенные ниже уравнения решаются мето- дом разложения на множители.

1) 2‘ z — 4т — 4 + 2‘ = 0; 2‘ (т + 1) — 4(т + 1) = 0;

(z + l)(2‘ — 4) = 0; т = 2; z = —1.

2) 3‘ z — 3"' + 27 — 9z = 0; 3‘(z — 3) — 9(z — 3) — 0;

(z — 3)(3‘ — 9) = 0; z = 2, z = 3.

О т в е т: I) 2, —i; 2) 2, 3.

**Пример 2.** Решите уравнение методом разложения на множители:

 2) 2x2cosx + 9 = l8cosx + т'.

Решение: Нриведенные ниже уравнения также решаются методом разложения на множители.

l) 2x' siп z — 8sinr + 4 — х' = 0; z' (2sinr — l) — 4 (2sinr — l) = 0;

(2sinx — l) (х — 2)(x + 2) = 0;

*х* = 2, х = —2, х = (—1)‘ —+ 

6

1. 2x2cosx + 9 = l8cosx + x2; x2(2cosx — l) — 9(2cosx — l) = 0;

(2cosx — 1)(x — 3)(х + 3) = 0; *х ——*33, х = + + 2зп.

О т в е т: i) (—i)‘ —+ 

6

Прнмер 3. Peшme уравнение методом введения новой пе- ременной:

l) х' + 1 — 2s — 6 х — l — 7;

2) <' —4< + 4 — 6 = 5 2 —<.

Решенне: Нриведенные ниже уравнения решаютСЯ Мето- дом замены переменной.

i) х' — 2z + 1 — 6 х —1 = 7; ОДЗ: х — 1 й 0, z й i ;

z — i = *а* й 0; *a2* — ба — 7 = 0; *а ——* 7, *az* —— —1.

*а ——* 7 m х = 50; *а* —— —i — не подходит;

2) ' —4z + 4 — 6 = 5 2 — ; ОДЗ: 2 —z 0, Е 2,

2 — *х ——а* й 0; a2 — 5a — 6 = 0;

*а —-* 6 m х = — 34; *а* —— —i — не подходит; О т в е т: l) 50; 2) —34.

**Прнмер 4.** Решите уравнение методом введения новой пе- ременной:

l) 2° + 2'°°= 3; 2) 25 — 50 = 5°‘“'.

Решенне: Приведенные ниже уравнения также решаются

методом замены переменной.

l) 2° + 2' “ = 3; 2" = *а* > 0;

*а +* 2

*а*

= 3; *a2* — За + 2 — 0;

*а* = 1 =г z = 0; *а* = 2 =г х = 1;

2) 2У"— 50 — 5°" '; 5°"= *а* > 0; *a2* — 5a — 50 = 0;

п — 10 =г z —— — log, 10; *а ——* —5 — не подходит. О т в е т: 1) 0, 1; 2) —log5 10.

Нрнмер 5. Решите уравнение методом введения новой пе- ременной:

1) 192 2+ lgl0z — 6 = 0; 2) 3° + 3‘°+ ' = 4;

3) 2cos2z — 7cosx — 4 = 0; 4) 5' + 125 = 6 5 “'.

**Решение:** Приведенные ниже уравнения также решаются методом замены переменной.

1) lg2z2 + lgl0z — 6 = 0; ОДЗ: *х* > 0;

*а -—* lgx; 4а2 + *а —* 5 = 0;

*а ——* 5

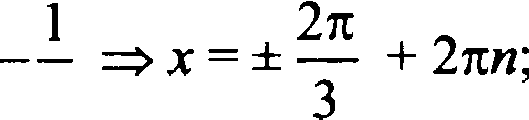
4

=10°"" ' ; *а ——* 1 =г z = 10;

2) 3° + 3 + ' = 4; 3°= *а* > 0;

*a2* — 4s + 3 = 0; *а ——* 3 =г z = 1; *а ——* 1 m z = 0.

1. 2cos2 z — 7cosx — 4 = 0; cosx = *а, а й* 1;

2а2 — 7a — 4 = 0; *а ——*

2

*а ——* 4 31 — не подходит;

4) 5 ' + 125 = 6 5 “"' ; 5 = *а* > 0;

*a2* — 30a + 125 = 0; п = 5 =г z —— 1; *а ——* 25 =г z ——4.

О т в е т: 1) 10, 10 ; 2) 0, 1;

3) + 2

s

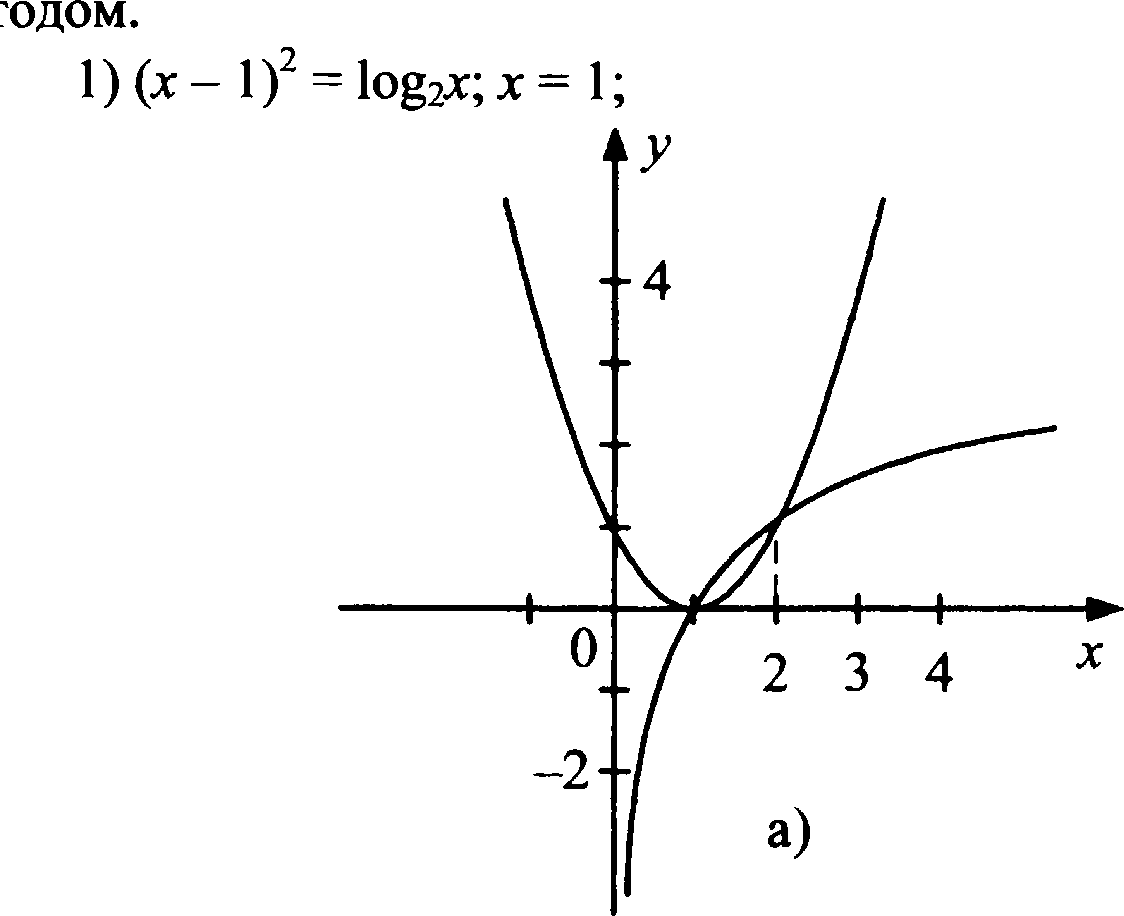
+ 2яи; 4) 1, 4.

Пример 6. Решите уравнения, используя функционально- графические методы:

1) (z — 1)2 = log2z; 2) log, х = *х +* 1 '

2

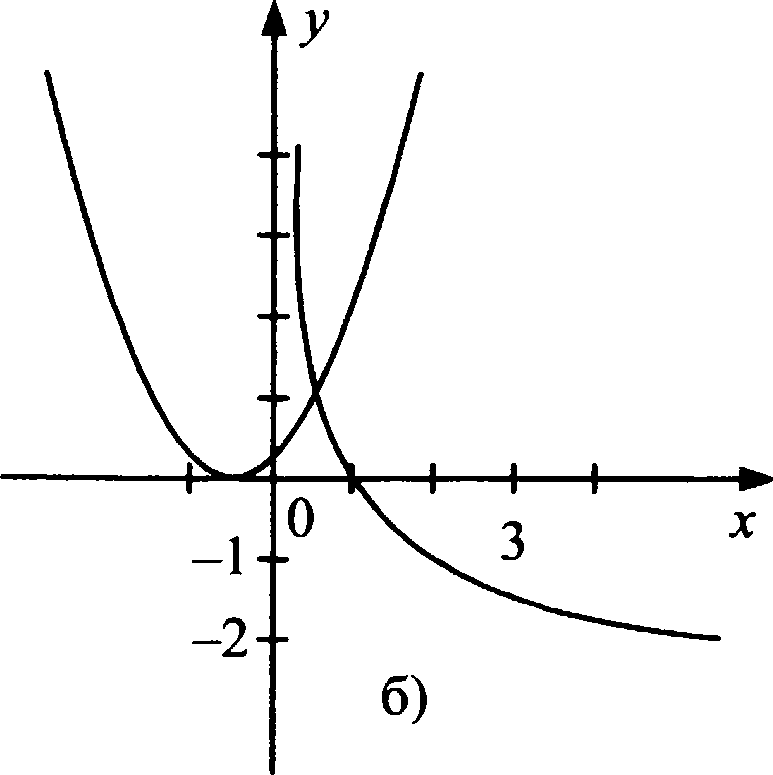
Ретение: Даиные уравнения решаются графическим ме-

х = 2 (см. рис. а))

1. log, х = i+-

2

, х = 2 (см. рис. 6)).

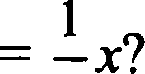


О т в е т: l) 1, 2; 2)

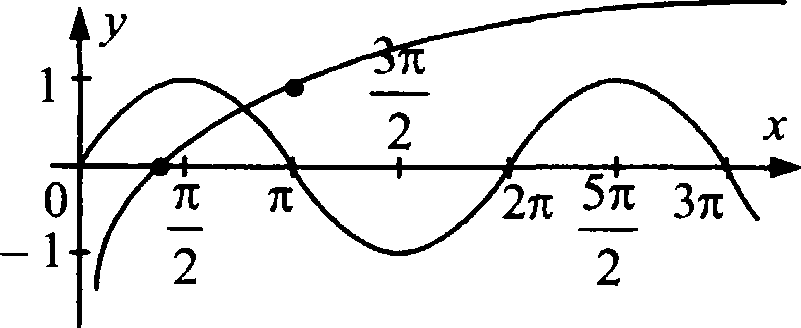
2’

Пример 7. Сколько корней имеет уравнение:

* 1. log, х = sin х; 2) x2 + I = cosx;

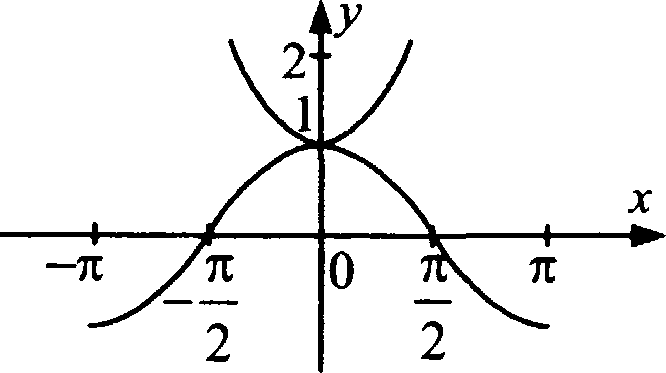
1. love. = = cosт; 4) sin х 9

Решение: В данном примере для решения уравненнй йсполь- зуются свойства грж§иков функциіі.

1. log gт = sin т; 1 решение (см. рис. а));

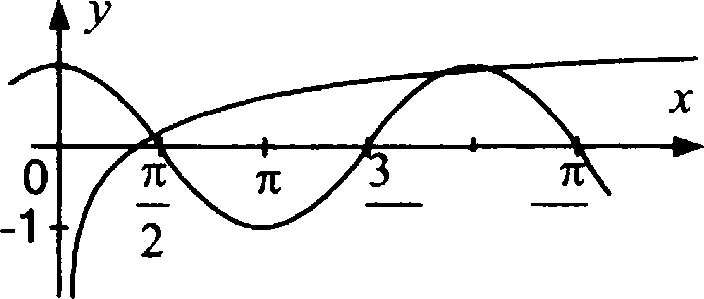
а)

1. х + 1 = cos т; 1 решение (см. рис. 6));



6)

1. log „т = cos т; cos т — 0 при х = , а log,g т = 0 при х = 1;
2. < 2 . Qaлee cos 2к = 1, а log„ 2я < 1 . Отсюда схематичный график (рис. в). 3 решения (см. рис. в));

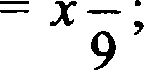
" 2x

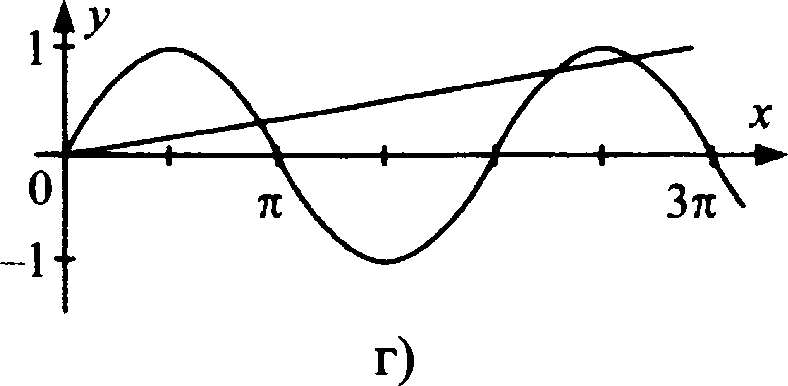
2 2



1. sin *х*

1 т — 0 — решение, при х > 0 — 3 решения

(см. рис. г)) и в силу нечетности обеих частей уравнения при т < 0 также 3 решения; т.е. всего 7 решений.

2п

О т в е т: 1) 1 решение; 2) 1 решение;

3) 3 решения; 4) 7 решений.

Нижеследующие примеры используют несколько методов решения уравнений одновременно.

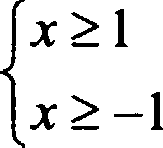
**Прямер 8.** Реііште уравнение:

1) *xcl + х -* l *= 2*

2) 233+1 — *xl—* = 3.

Решение:

1) х 1 + *xl—* = 2 ;

ОДЗ:  *; х* й I; 2x + 2 ' —1 = 2;

' — 1 = I — х, х < 1 =г х —— I; проверка: 2 = 2 ;

2) 233+1 — *xl-* = 3 ; О,ІЈЗ: *х* й I; 2x + I =

*—— х —* 1 + 3 + 2 Зх — 3 ;

*х —* 1 = 2 Зх — 3 ; *xl—* х — 1 — 23) = 0; *х ——* 1, х ——13.

О т в е т: l) l; 2) l, 13.

**Пример 9.** Решите уравнение:

1. cos5x + cos7x — cos6x = 0;
2. sin9x — sin5x + sin4x = 0.

Решенне:

l) cos5x + cos7x — cos6x = 0; 2cos6xcosx — cos6x = 0; cos6x (2cosx — 1) = 0;

cosx —2 , *x —— *

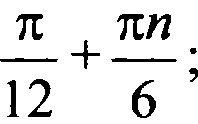
3

+ 2 *en, n e d.*

2) cos6x — 0; x



12 6

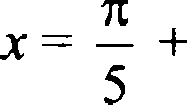
O T B e T: + —-F 2nn,’

3

2) sin 9s — sin5x + sin4z = 0; 2sin2x cos7z + 2sin2x cos2x = 0; 2sin2x (cos7x + cos2x) = 0;

sin 2x COS ’COS 

2 2 2 " 9 9

2xn ,n at .

O T B e T

' 2 9 9 5 5

Hpiiuep 10. Peiu Te ypaBHeH e:

I+z 3

1) 2-'

5 = 50; 2) 3-'

2° = 24;

3) 3' ' 625'—' = 225; 4) 5-' 2 ' = 40.

PeiueH e: 1) 2° 5 • = 50; 2° 5 • = 10;

1 *+ x* log 2 = log l0; *x2* log 2 — x log 10 + 1 = 0;

*x*

*D ——* log25 10 — 4 log 2 = 1 + 2 log5 2 + log2 2 — 4 log 2 =

 — log 2)2 > 0;

1 + log, 2 + 1 — log, 2 = lor z 5,

2log, 2

*xz ——*

+ log, 2 — 1 + log, 2

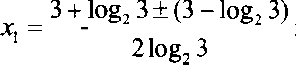
2log, 2

O T B e T: 1; lo ;z5.

2) 3" 2 ' = 24; 3 *+ х* lo823 = 3 + lo823;

*х*

*x2* logz3 — (3 + logz3)x + 3 = 0;

‘

О Т В е Т: 3log 2; 1.

6 = 3log 2, *х ——* 1.

2log, 3

2



3) 3 ' 625 ' = 225;

*х —* i + i +

i *— х*

lo8з 625 = 2 + log, 25;

*х —* 1)2 — *х —* 1) (2 — 2 lo8з 5) — 4 logз 5 = 0; I) *х —* i = 2; *х* ——3;

2) *х —* 1 — —2 log 5; *х ——* 1 — 2 log 5.

О Т В е Т: 3; 1 — 2 log 5.

2+т 2

4) 5" 2 ' = 40; 5" 2 ' = 20; *х +*

1. log 2 = l + log5 4;

*х*

*x2 — х* (I + 2 log, 2) + 2 log 2 = 0; *х ——* 1, *х ——* 2lo85 2.

О Т В е Т: 1; 2log 2.

Пример 11. РешиТе ураВНеНие:

1) ln(0,2" — 7) = ln(9 — 3 0,2");

2) 9'”'' — 12 3'°" ' + logj 27 - о;

3) *е"' 2)*

*е*

4) log,(2 +-3 5‘") = *х +* I.

Решение: l) ln (0,2" — 7) = ln (9 — 3 0,2‘);

oq3- 0›2 7

0, 2' < 3.

О Т В е Т: Нет решеНий.



О т в е т: z = 3, z = 9.

т > 0,

z 2 — 123 + 27 = 0.

3) е'\*""'

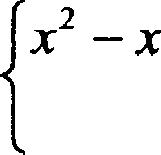
= (е") "'“" lg (z — 2) — 1= — g (z + 1)

е

lg(m2 — т — 2)= 1,

< Е 2,

z = 4,

—2 = 10, . = —3, х = 4,

< Е —1; т ? 2; т12.

О т в е т: 4.

4) lo (2 +-3 5 =z+ 1; 2 + 3 5 °"= 5 5";

5 5“—2 5"—3 = 0;

1) 5" = 1; = 0; 2) 5° —— ;нm решений.

О т в е т: 0.

Првмер 12. Решите уравнение:

1) х' — 2z + 2 + log x2 — 2z + 10 = 2;

2) (т — 7)‘ + log, т2 —14a + 74 = 1.

**Ретенне:**

1) т' — 2т + 2 + log, к2 2+i›o=2;

фуніщия *у —— —— x2* — 2x + 2 принимает минимальное знач-

*и:не у ——* 1 при т = 1; функіщя log, ›' 3+l о принимает ми- нимальное значение у —— *I* при z = 1.

О т в е т: 1.

2) (х — 7)6 + logs к2 —14a -г 74 = 1; рассуждая аналогично ітредыдущему пункту, получим: т = 7.

О т в е т: 7.

Прнмер 13. Решите уравнение:

1. love(=' — 4т + 8) = **SIП** 5пх **—COS** nx ,

4 2

1. log,(т2 + 4s + 13) = cos иx — sin

4

**Решение:**

1) log2 (z2 — 4z + 8) = sin



— cOS ,

4 2

функция *у ——* log2 z 2— 4z + 8) принимает минимальное зна- чение *у ——* 2 при z ——2 а при z w 2, *у* 2;

5пх кх

 — **SIП** — **GOS**

4 2

Нринимает максимальное

значение у ——2 при z ——2; при z w 2, *у й* 2.

О т в е т: 2.

2) logз (z2 + 4z + 13) — cos ях — sin

4

ассуждая анало-

гиино предыдущему пункту, получим: *х ——* —2.

О т в е т: —2.

Нример 14. Решите уравнение:

 + 5 = 4 2) 1 —  ~~$~~  ~~'~~  = 5.

2

**Решение:**

 + 5 = 4, + 5 = 4, или

2 2

+ 5 = --4 ,

2

*х — 3 +* 10 = 8, или z — 3 + 10 = —8, *х ——* I, x2 = —15.

О т в е т: 1; —15.

2) 1 — + 2 - 5, 1 — + 2 = 5, или 1 — + 2 —5 ,

1 — х = 15 или 1 — z = —15, z, = —14 или —z = —16, <z' 16.

О т в е т: 16; —14.

**Пример 15.** При каких значеннях *а* данное уравнение: 1) ‹zr — 2r = 3(х — 1);

2) *a(1* — z) + 2 — 3z — ‹zr;

3) z(2 — *а) - х ——* 5 + z;

4) 5 + 3(z + За) = 9a + 5;

1. 2a(z — 2) = *а 2x —* 4) — имеет единственное решение; не имеет решений; имеет бесконеяное множество решений?

**Решение:**

1) ах — 2x = 3(z — 1), дх — 2x — 3z = —3, *а —* 5*Ц ——* —3;

при *а w* 5 — одно решение; при *а —-* 5 — нет решений. О т в е т: при *а* 5 — одно решение;

при *а ——*5 — нет решений.

2) *a(1* — z) + 2 = 3z — вх, *а — ах +* 2 — 3z + иx = 0, 3z = *а* + 2, при юобьт а — одно решение.

О т в е т: при любіях а — одно решение.

3) z(2 — а) — z = 5 + z, 2r — ‹zr — z — z = 5, --nr = 5;

при а z 0 одно решение; при а = 0 — нет решений.

О т в е т: при *а* 0 одно решение; при а = 0 — нет решений. 4) 5 + 3(z + За) = 9a + 5, 3z + 9a = 9a, 3z = 0; при любьт *а —*

одно решение.

О т в е т: при любых а — одно решение.

5) 2‹zr — 4a = 2ох — 4a;

0 = 0 — верно при любых *а.*

О т в е т: бесконечное множество решений — при любых а.

* 1. **Системы уравнений** с **двумя перемевнмми**

**Пример 1.** Решите системы уравнений

*х — фу ——* 4,

*х + фу ——*8,

2)

2 + 3 = 18; *-х фу —-*15;

ЗА — ——8,

*ix +* 2 = 19;

Решение:

— 12,

4)

*х + фу --* 7.

* 1. Данная система уравнений содержит 2 иррацнональных уравнения. Она решается методом простого исключения ne- ременных с последующим возведением полученнмх уравне- ний в квадрат.

— ——4, —2 + 2 —— —8,

2 + 3 — 18, 2 + 3 = 18,

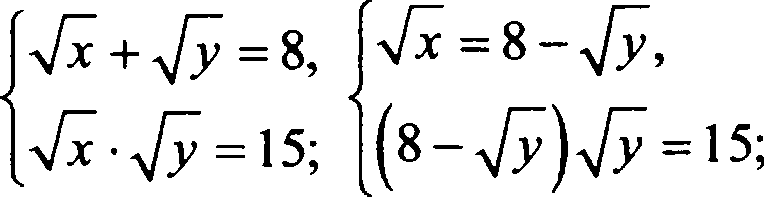
*S фу ——*10, *фу* ——2,

у ——4, — 2 = 4, = 6, *х ——* 36.

О т в е т: (36; 4).

1. Данная система уравнений также содержит 2 иррацио- нальных уравнения. Она сводится к квадратному уравнению относительно новой неотрицательной переменной z *фу . Из*

этого квадратного уравнения находятся значения переменной *у,*

а по значениям переменной у находятся значения переменной *х.*

8 — *у -* 15 = 0.

*фу - z, —* 8z + 15 = 0, z = 3, 2' 5,

*у,* 3, *у —* 5, ——9, *32* — 25, *х, ——*8 — 3,

т + 2т — 3

<' — 2< + 8

0= 8 — 5,

<- 25, <2' 9.

О т в е т: (25; 9); (9; 25).

1. Данная система уравнений решается аналогично систе- ме уравнений из примера i).

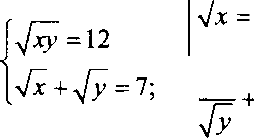
*дух — фу ——*8, *бах —* 2 = 16,

*ix +* 2 = 19, + 2 — 19.

7 35, т = 25,

5 + 2 19, 2 = 14, 7, у = 49. О т в е т: (25; 49).

1. ,f{анная система уравнений решается аналогично систе- ме уравнений 2).

12

12 7 = 0.

2 + *z -* 7 = 0, 12 + *z’ —* 7z ——0, *z —— 3, zz -—* 4, = 3, = 4,

= 9, 32' 16,

, ——7 — 3, , ——7 — 4, = 4, *Йz -- 3, х,* ——16,

*x2* = 9.

О т в е т: (16; 9); (9; 16).

**Прнмер 2.** Реіюіте системы уравнений:

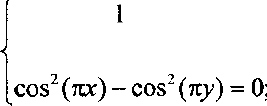
sin *х* cos у = 0, 25, sin у cos *х* ——0, 75;

4sin *xsin* у = 3,

##### tШar = з:

Решение:

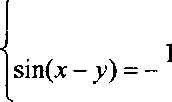
2) 3'

4) sin' *х ——*cos тcosy, cos' т = sin *xsin* у.

1. В этой системе уравнений имеется два тригонометриче- ских уравнения. Сложив уравнения и вычтя из первого урав- нения второе, мы получаем новую систему уравнений относи- тельно переменных z + у и т — у, которая решается обычньши методами.

sin х cos у ——0, 25, sin уcos х — 0, 75.

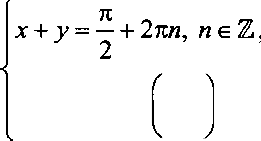
Сложим уравнения, затем вычтем из первого второе урав- нение:

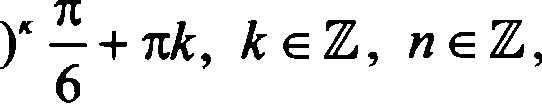
sin xcos у + cos xsin у ——1, sin(x + *у) ——*1,

sin хcos *у -* cos xsin

i

“ 2' 2'

*х — у* = (—1)’ — + nk, k е Z;

2т = —+ 2 + (—1

2

i=—+  4

— + , k 

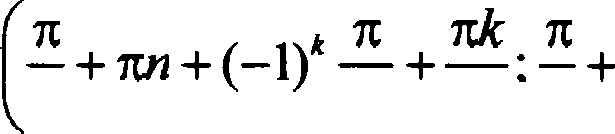
12 2

2 2пп — (—1)a —

2 6

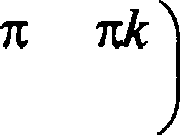
= — + оп —

4

О т в е т:

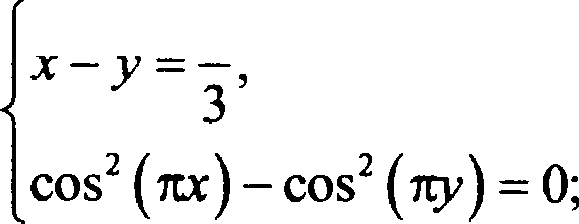
4

12 2

с —(—i i+I *,keE,neE.*

12 2 4 12 2

1. Данная система содержит одно тригонометрическое и одно рациональное уравнение. Тригонометрическое уравнение системы разлагается на множители, после чего преобразовы- вается в уравнение равенства иулю двух сомножителей. Затем решаются четыре совокупности уравнений.

i

1

(cos кг — cosщ)(cosкг + cos *ny) ——*0;

—2sin ~~+~~

2

2cos ~~+~~ cos 2

= 0,

2

г+ — 0, или sin

2 2

w+ **’=0,или**

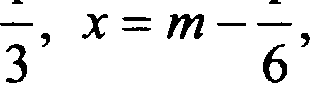
2

cos*~~"~~* = 0; *их + ny* = *rm, т* о Z,

2 2 2

2

*х + у ——* 2m, *m* о Н,

1) i 2т = 2m — 1 1

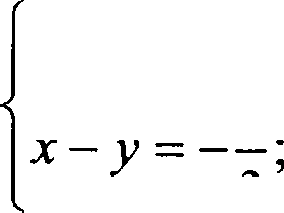
*—* = ——i

1 *т* е @;

*т+*

*—,*

6

*х — у* = 2k, k о Н , 1

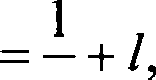
2) i *k* = —6

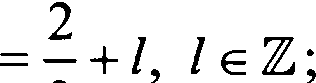
ешений нет;

т + *у ——*1 + 2/, f о Н,

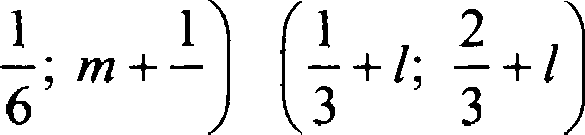
2

2x—— — + 2/, i



*х — у* = l + 2л, л о Z, 2

4)

О т в е т: *т —*

6

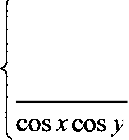
решений.

, / е Z , *т* е Н.

1. Данная система уравнений содержит два тригонометри- ческих уравнения. Она решается подстановкой первого урав- 56

Henrik cuczeusi **BO BTOpoe** c nocnenyx›u1uu cnoweiiiieu ii **BhIHH-**

Tannen nooyuHBiuuxcs ypaBHeiiuii.

sin xsin y = 3 3

4sin xsin y = 3,

4 4 =3,

t gy = 3; sin xsin y = 3;

sin xsin y = —3 ,

cosecosy

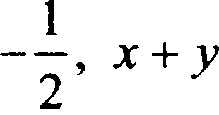
cos icos = ,

4

cos XcosJ = ;

sin xsin y + cos ecos y = 1, cos(x — y) = 1,

sin xsin y — cos x cos y = 2, — cos(x + y) =2 ,

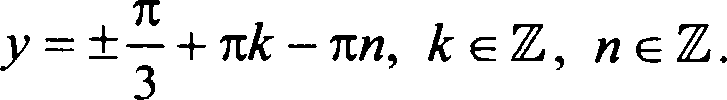
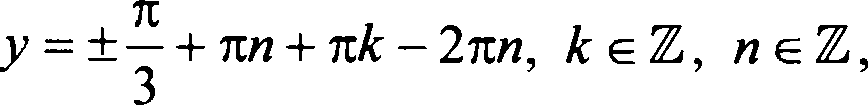
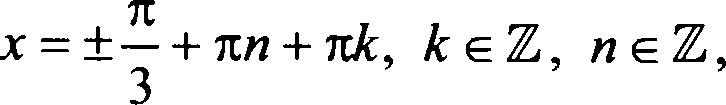
cos(x + *y) —— *

i-y=2 ,weE,

\_+2z

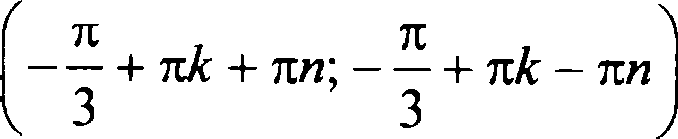
3

i+y=i 3 +2V,AcZ;

2x = 1 2 + 2xn + 2xk, k e 4, n e 4, 3

O T B e T: — + né + — + *rk* — no

3 3

, *keE,* neE.

57

1. Данная система также содержит два тригонометрических уравнения. Qля ее решения необходимо сложить оба ее уравнення и воспользоваться основные тригонометрическим тождеством.

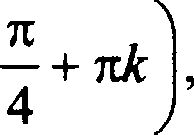
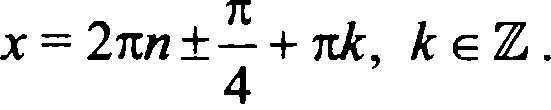
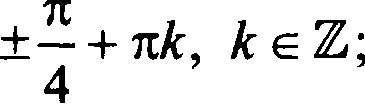
siп2 х = cosтcos *у,*

cos' т = sin xsin *у;*

1 = cos хcos *у* + sin xsin *у,* cos(x — *у) ——*1,

*х — у* = 2пл, л е Z, *х =* 2пп *+ у,* л е Z; sin 2 (2пп + у) =

= cos(2nл + *у)* cos *у,* л е Z, sin *у —\_* cos *у,* sin’ *у* — cos *у -—* 0,

=1, cosy z 0, tgy = 11, *у -— *

О т в е т: *— + nk +* 2ип; 4

*—— + яk* +2 ;

4

—— + W

4

*,keE,neE.*

**Првмер 3.** Решите системы уравнений:

9”’ = 729,

з-—-—' = i;

2) 2" — 2’ = 16,

*х+ у -—* 9;

з I“ ' 25a 4

6" ' = 1; '

Решенне:

3" + 3’ = 28,

< — = 3.

1. Данная система уравнений содержит два показательных уравнения, она сводится к системе двух рациональных урав- нений первой степени.

9“’ = 729, 9”’ = 9', *х + у ——*3,

3" "' = 1; 3" ' = 3'; <— — 1 = 0;

2x = 4, х = 2, у = 1.

О т в е т: (2; l).

1. Данная система уравнений содержит одно показатель- ное и одно линейное уравнение. Выразив из второго уравне- ния одну переменнут через вторую и подставив это выраже- ние в первое уравнение системы, мы получим квадратное уравнение относительно новой переменной.

2" — 2’ = 16, 2"’ — 2’ = 16, 2’ — 2’ —16 = 0.

*х + у* = 9; *х =* 9 *— у;* 2’

2’ = g 512 — 16 = 0, 512 — *z’ —* 16a = 0,

*z*

z' + 163 — 512 = 0, z,=16, *z ——* —32;

2" = 16, 2" = —32 — решений нет.

*у* — 4, х = 5.

О т в е т: (5; 4).

1. ,fЈанная система уравнений решается аналогично 1).

)' = 25, 5 = 5' *х — у* = 2, *х — у =* 4,

2

6"°°" = 1; 6" " — 6’; бу — х — i = 0;

*5y ——5, у -—* 1, *х ——5.*

О т в е т: (5; i).

*—х +* бу = 1;

1. ,fЈанная система уравнений решается аналогично 2) с тем лишь отличием, uтo мы получим в итоге не квадратное уравне- ние относительно показательной переменной, а линейное.

3" + 3’ = 28, 3"\* + 3\* = 28, 27 3’ + 3’ = 28, 2-8 3’ = 28; х — у ——3; *х ——*3 *+ у;*

*у* = 0, х = 3.

О т в е т: (3; 0).

Пример 4. Решите системы уравнений:

lg х — lg у ——1,

lg' х + lg' у ——5;

2) log,(х' + у') ——5,

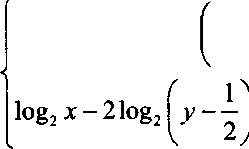
2log4 т + log, у = 4;

lgs — lgs ——7, lgs + lgs ——5;

log,(x + 1) = log, *y*

4)

1

4

= 0.

Pervenire:

1. Qa ax cHczeua ypaa e uii copepwm .gBa norapuQMxue- cxiix ypaB e xx. Ora peiuaezcx MeTOQOM BBene xs HOBhix nepe- Me siX, B pesyusTaTe vero Mei nouyuHM xaappaTiiyio cHczeMy ypaB e uii.

lgs — lgs ——1,

192 x + 192 *y ——* 5;

p II — v = 1,

lgr = u, lgy = ’ 2+ p2

= 5;

u = 1 + v,

2+ p2

1 + 2v + v = 5, 2v2 + 2v — 4 = 0,

2+ p2

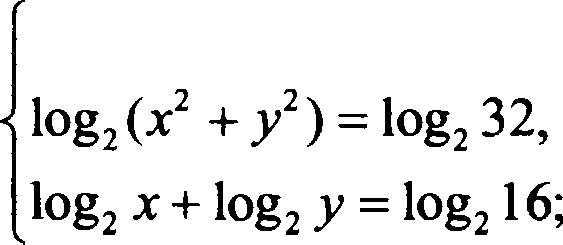
(1 + v) = 5;

v2 + v — 2 = 0, v, = —2, vi = 1; u, = —1, un = 2; lg x = —1,

lg y ———2 , lg z = 2, lg y —— 1; x = 0,1 , y, —— 0,01; z = 100, y2 = 10.

O T B e T: (0,1; 0,01); (100; 10).

1. Qa ax c czeua Taxwe copepwHT pea norapxQMuuecx x

ypaB e rix. Ora Taxwe cBopHTGII x xaappazuoii CHcveue ypaB e-



logo (x' + y 2 ) ——5,

2 log4 x + loro*y -—* 4;

x > 0, *y* > 0,

x' + *y2* = 32,

= 16;

x > 0, *y* > 0,

16 256

*y 2 +*

*y’* = 32, *y’ —* 32 *y’* + 256 = 0, *y’* —16)2 = 0,

*y ——*4, *y2 = —4 , y* 0; z = 4.

O T B e T: (4; 4).

1. Qанная система двух логарифмическнх уравнений при помощи сложения обоих уравнений системы приводится к логарифмическому уравнению с одной переменной.

lgx — lgy ——7, *х* > 0, lgx + lgy ——5; *у* > 0;

219 х ——12, lg х ——6, *х -—* 10 ,

6 + lg у ——5, lg у —— —1

О т в е т: (106; 0,1).

*y——ё*

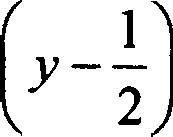
1. Qанная система двух логарифмических уравнений сво- дится к квадратной системе, но нельзя также забывать при переходе от системы логарифмических уравнений к квадрат- ной системе об области определения логарифмов.

*х* > 0,

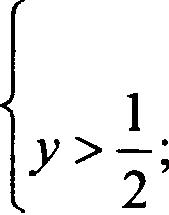
log,(х + 1) = log, *у*

+ 4

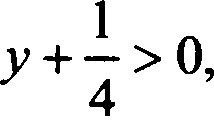
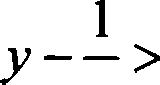
+ 1 > 0,

log, х — 2log, 

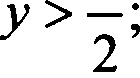
*х* > 0,

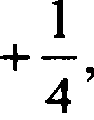
*х* > *х* > 0, 4

= 0;

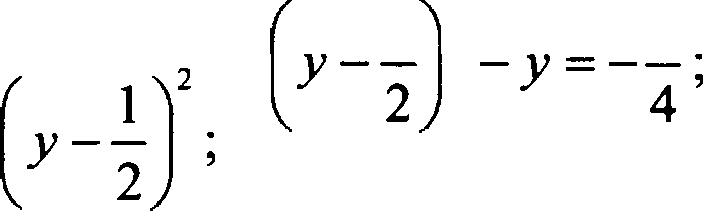
0;

2

i

*х +* I *= у*

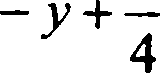
*х* 3

4 1 ' з

*х —— * 2 '

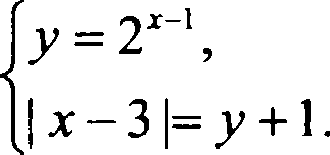
*х -—*

+ -i з = 0, ' — 2 + 1 = 0, ( —1)' = 0,

4 

у = I, х ——0, 25. О т в е т: (0,25; 1).

Нример 5. Решите графически систему уравнений:

*-у* 2‘ = 1,

1) 2)

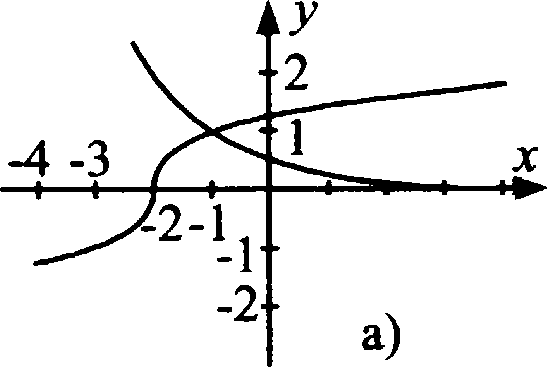
' х + 2 = *у;*

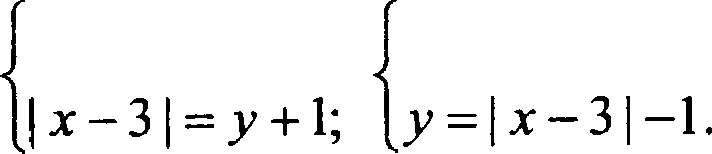
Решение: Qанные системы решаются графическим меі

у- 2"' = 1, *у -—* 2 1 ,

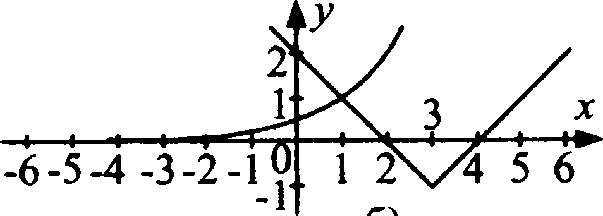
*х+* 2 *= у; у* = ' х + 2.

О т в е т: (—1; 1) (см. рис. а)).

01 ј ј 4

2) *у* = 2" ' ; *у* = 2"

О т в е т: (i; l) (см. рис. 6)).

2

-6 -5 -4 -3-2 - IЈ 1 2 4 5 6

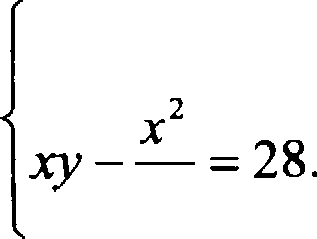
6)

Нример 6. Решите системы уравнений:

log, *у +* log, х log, *у —* 2log, х = 0,

l)

9т' — ' —— 1;

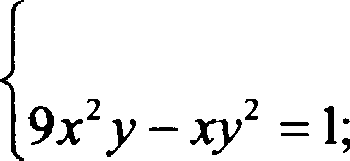
2log) z + log, х log, *у -* log) х = 0,

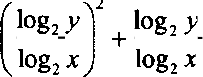
2)

i2

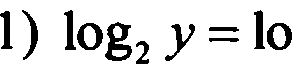
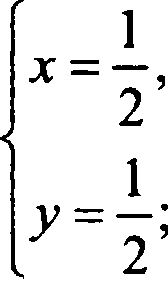
Pemeaue:

1. B sauron cxcTeue ypaa e ii zpe6yezcs nonenxTs nepBoe Tax asniBaeMoe on opon oe ypaB e xe cxczeMsi va log) z peuixTs nony•ixBiueecs xaappavuoe oT oc Tens o HOBOii nepe- Memnon ypaBiieiixe.

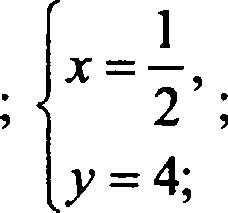
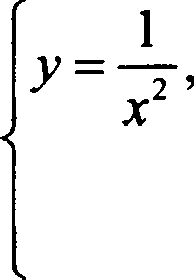
log) *y +* logo x logo *y —* 2log) x = 0,

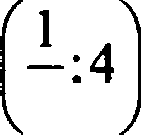
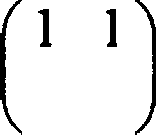
*O,Q3: x, y* > 0 ;

-2=0;

1. lord*y* ———2 log • i

9 — = l;

O T B e T

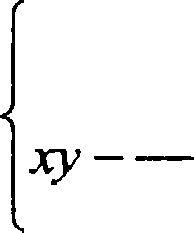
' 2'2 2'

2) Для решенхя данной системы уравнеНий НеобХодимо разложхть перВое ураВііенне систеМы На МНожители, а заТеМ решить получиВшиеся сОВОхупностх ураВнеііий.

2log) z + logo z logo *y —* logo x = 0,

X2

—— = 28;

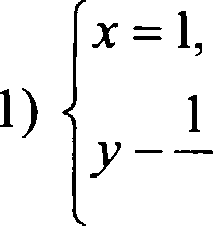
lord =(log, x + log, *y j --* 0,

*x 2*

= 28;

*y*

logo = 0, logo=0; OQ3: <, > 0 ;

= 28; — 283 — 1 = 0;

у = 14 + 1 , т.к. у > 0, то - 14 + 1

< = 1.

2) г = —— — не подходит;

1 — = 28; 3

О т в е т: (1; 14 + 1 ).

Прнмер 7. При каком значении п система уравнений:

— 5 = 7,

их — у = —3;

2) х + 2y = а, 2 + 4 = 5;

имеет единственное решение; не имеет решений; имеет беско- нечное множество решений?

Решение:

— 5 = 7, — 5 = 7,

их — у = —3; —5ох + 5y = 15; х — 5пг = 22, x(1 — 5a) = 22;

и а г — — 1 решение; при а

5

 решений.

5

О т в е т: *а 45* — 1 решение; при *а —— *

5

решений.

2) х + 2y = а,

2z + 4 ——5;

если а = 2,5 — бесконечное множество

решений; если а а 2,5 нет решений.

О т в е т: а = 2,5 — бесконечное множество решений; а z 2,5 — нет решений.

Пример 8. Решите системы уравнений:

*х* 13

1. *х у* 6

*х* + у = 5;

*y— —— ,*

*х* — 1)' + у' = 1;

Решеине:

*х* — у = l,

*х’ — у’* = 7;

4) *х’ + у’* = 35,

*х* + у = 5.

I) Это система двух рациональных уравнений. Решается

:ведением к квадратному уравнению.

*у+ ух у +* 5 — у р\_ 13

*х у* 6 5 *- у у* 6 х z 0, *у4* 0,

*х + у =* 5; *х =* 5 *— у,*

63 2 + (5 — *у)’* 6 —13a(5 —

y(5 — *у)* 6

253 2 —1253 + 150 = 0,

(5 — )

*y 2 —* 5y + 6 = 0, *у w* 0, у z 5;

y(5 — у) z 0; = 2; ru = 3; х, ——3; *xz ——* 2.

О т в е т: (3; 2); (2; 3).

1. Данная система решается аналогично 1).

*х — у ——*1, *х — у ——*1, z — у ——1,

*х’ — у’ ——* 7; *х — у) x 2 + ху + y 2 ) ——* 7; *х’ + ху + y 2 ——* 7;

*х* = 1 + у,

(1 + у)' + (1 + у)у + *y 2 ——* 7;

l + *2 у* + y 2+ *y* + *y 2*+ 2 — 7 = 0; *у* + у — 2 = 0, (у — 1)(y + 2) = 0; *Yi !› Yz —* 2;

*х ——* 2, х —— —1.

О т в е т: (2; 1); (—1; —2).

65

1. Система решается аналогично 1).

› = 2,

##### ‹ з о,

= 2т,

(\*— h' +\*' = i;

(х —1)' + 4s' = l;

x2 — 2x + l + 4х2 1 = 0, 5х2 — 2x = 0, x(5z — 2) = 0;

*xi* = 0 — не удовлетворяет условию; х, = 0,4, у = 0,8.

О т в е т: (0,4; 0,8).

1. Система решается аналогично 1).

т' + ' = 35,

х + у = 5;

5(z 2 — + ' ) ——35,

' — + у' = 7,

т = 5 — у;

(5 — 3) 2 — (5 — ) + ' = 7, 25 — 103 + ' — 5 + ' + 2 = 7 ,

3 ' —153 + 18 = 0, ' — 5 + 6 = 0, , = 2, , = 3 ;

х = 3, <2 - 2.

О т в е т: (3; 2); (2; 3).

* 1. Нерявенствя с одной перемеяноіі

Пример 1. Решите неравенства:

l) (т —1)(т — 2)> 0;

(\* — 3)

 т — 2 (т — 3)(т — 5)

2) т + 2z — 3

т' — 2т + 8

4) т + 5т + 4 0 .

т' — 5т — 6

**Решение:** Все вышеприведенные неравенства решаются методом разложения числителя и знаменателя на множнтели с последующим применением метода интервалов.

2

О т в е т: *х е* [i; 2] О (3; +m).

2) т + 2т — 3

х' — 2x + 8



(т' — 2т + 8)

0, т 2 — 2x + 8 > 0 при

любом х, (х —1)(x + 3) й 0, — 3 й х й 1

О т в е т: *х в* [—3; 1].

 — 2

*(х —* 3)(х — 5)

(х — 2)(x — 3)(х — 5) < 0.

О т в е т: х е ( ; 2) U(3; 5).

4) + 5 + 4

—3 1



2 3 5

х' — 5x — 6 —4 —1 6

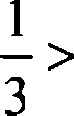
> 0, ( + 1)'( + 4)(т — 6) > 0 .

О т в е т: *х в , --4)* (6; ).

**Пример 2.** Решите неравенства:

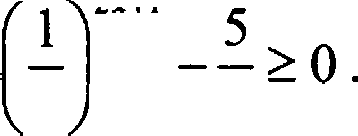
1) 0, 04° — 26 0, 2" + 25 0; 2) 9" — 8-4

3 2 + 0;

3) 4' —1-0

2' + 16 < 0 ;

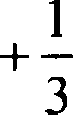
4) 2'"' +

2 2

Решенне: Все нижеприведенные неравенства решаются методом введения новой переменной.

1) 0, 04" — 26 - 0, 2" + 25 0, (0, 2)'" — 26 0, 2' + 25 0 ;

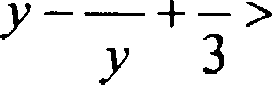
0, 2" = у, то y2 — 26a + 25 й 0, (у — 25)(y — 1) й 0, 1 й *у <* 25 ;

1 й 0, 2' й 25, 5° й 5 ' й 52 ; у = 5 ' — возрастает, 0 *—х* 2. О т в е т: *х в* [—2; 0].

2) 9" — 84 3 '" + > 0, 32 — 8-4

3"°

> 0, 32" *— у,*

84 l

0, > 0, 3 ' + — 252 > 0,

28

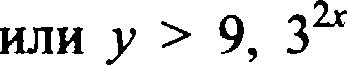
*y* + 3

( —9) > 0

28

*y* <— 3

< 28 — se

3

——

Meez peiueH ii; JIH 3“ > 9, 3“ > 32; *y ——* 3’ — Bospaczaez,

*2x >* 2, *x >* 1.

O z B e z: x e (1; +‹=).

3) 4º —10 2‘ + 16 < 0. 2" *= y, y* > 0, y2 — 10a + 16 < 0,

(r — 2)(y — 8) < 0, 2 < *y <* 8; 2 < 2‘ < 8, 2' < 2‘ < 2'; *y ——* 2’ —

BospacTaez, 1 < X < 3.

O T B e T: x e (1; 3).

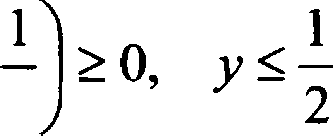
4) 2'“' + 

+ —1 ——5

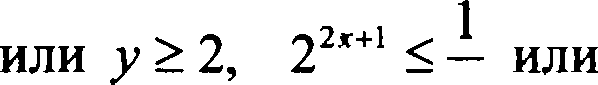
*y* 2

1 '"' 5 ü 0 ; 2'“' *= y, y* 0,

2 2

0, 2y 2 — 5y + 2 0, *(y —* 2) *y —*

2

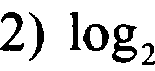
2'“' 2, 2'°" l < 2 l ; *y --* 2' — con-

2

paczaez, 2s + l —1, 2s ü —2, x —1; 2s + 1 ü 1, 2s ü 0, x 0.

O z B e T: *x c (--m; —* 1] lJ [0; + ‹x›) .

Hpuriep 3. Peiuuze epaae czBa: 1) 1g(x2 + x — 6) — Ig(z + 3) 1g3;

3z —1 < i :

2 *- x*

3) *V x +* 3s — 10) — *A(x —* 2) ü ln4;

4) 

Peiueuue:

1) lg(x' + *x —* 6) — lg(x + 3) 193;

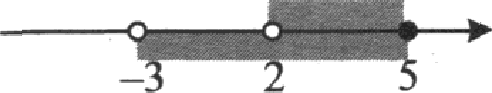
*x <* —3,

°°': *x+3x -* 6 > *x* > 2, *x* 2;

> o; . > —3.

2 -г х — 6

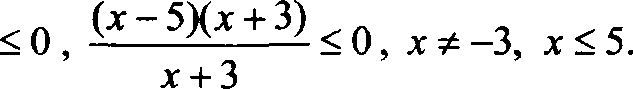
(z

lg '

й lg 3 ;

< + 3

х' + х — 6 < т2 + т — 6 — 3z  т + 3 ’ т + 3

х' — 2т —15

О т в е т: (2; 5].



log < log 2

' 2 — х 2

 - 1 — 4

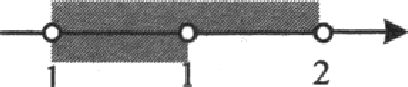
2 — <

Зт — 1

2-х

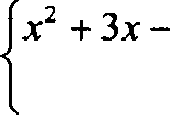
5т — 5 < 0, 5(z — l)(2 — z) < 0, т < l

2-х

ілнх» 2. 

О т в е т: т о ; 

3) Іп(т2 + Зт — 10) — In(x — 2) z ln4;

ОДЗ: 10 > 0, (т - 2N• + 5) > 0, > 2

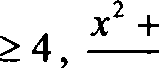
х —2 > 0;

*у ——* lnf — возрастает,

z 2 + Зх — 10



Зх —10 — 4т + 8 5 2

( — 2)

(z — 2)

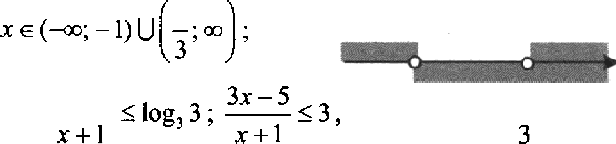
(z + l)(x — 2) (z — 2)

-1 2

О т в е т: z е (2; m).

4) log, > 0,

(Зх — 5)(x + l) > 0,

5

Зх — 5

IO@у

Зт — 5 — 3z — 3

z + l 0,



О т в е т: z е

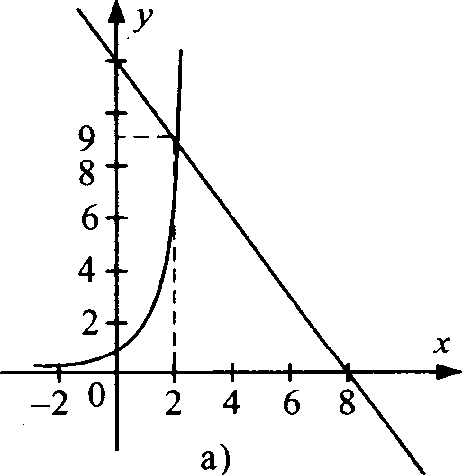
—1 5

Прнмер 4. Решите неравенства, используя графика: l) 3‘ > 12 — l,5т;

2) 2‘ ;

3) 3" й 12 — l,5x;

4) 2‘ .

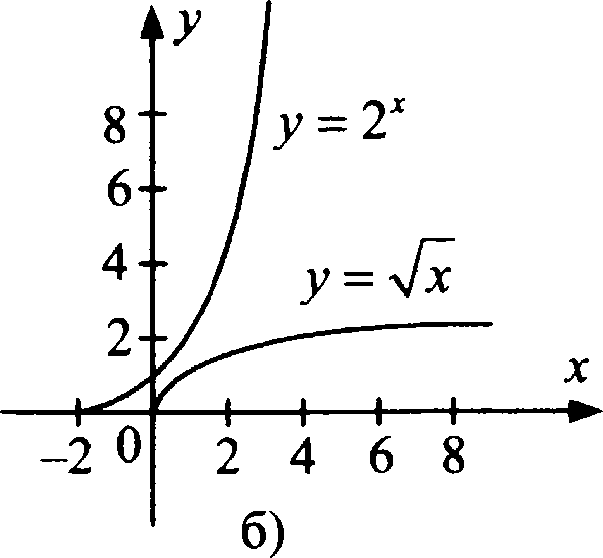
Решение: Данные неравенства решаются графическим ме- l) 3‘ > 12 — l,5x; х > 2 (см. рис. а));

12

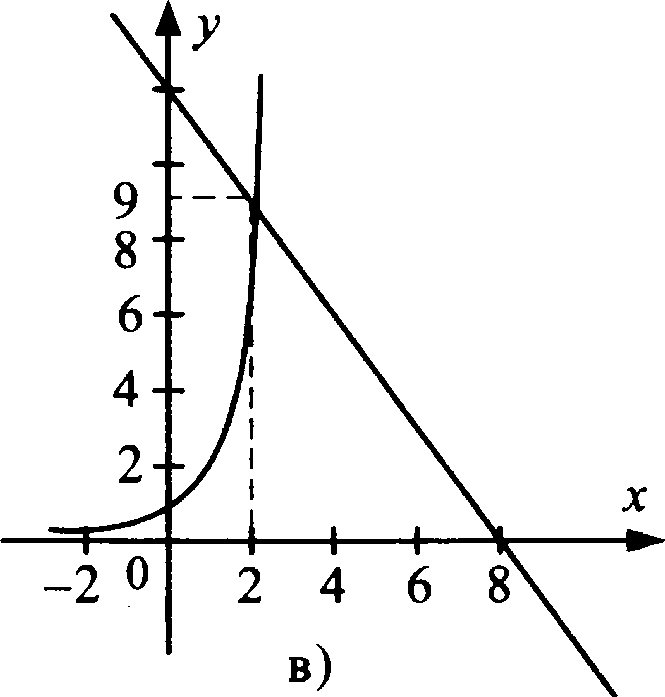
10

О т в е т: (2; + m) .

2) 2" й *ix; x* й 0 (GM. HG. 6));



O T B e T: [0; + in) .

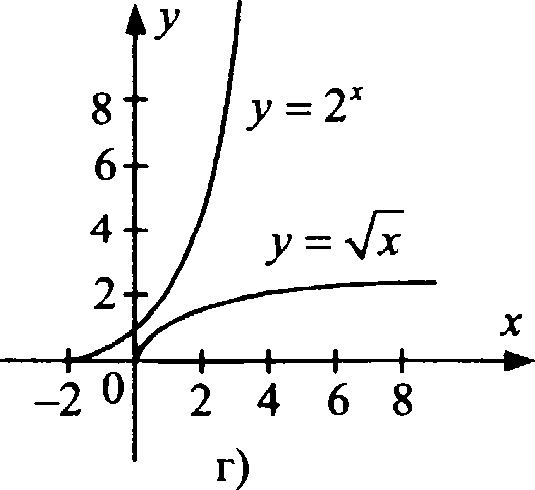
3) 3º й 12 — 1,5x; *x* < 2 (GM. j3HG. B));

12

10

O T в e T: ( ; 2] .

4) 2º й *ix,* eт peшe Hй (GM. pHc. r)).



O T в e т: Ø .



Пример 5. Решите неравенство:

16 — 8x < 4s + 2.

Решение: Данное неравенство решается раскрытием модуля.

16 — 8x < 4s + 2;

7 9

х е —; 6 2

16—8 <4x+2, 6 ’

1б—8т > *——4s—2;* 9

< 2'

О т в е т: 7 9

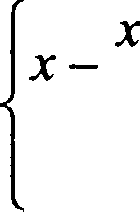
6 2

**Пример 6.** Решите систему неравенств:

*2x* > 3 — 133 — 2

'' т 2 *(х — Ј) <* Зх — 20

+ 1 *х+* 4*< х —* 1 2,

2) 2 3 4

1,53 — 2,5 < т;

6 + 3 9 '

*х+* I *ух*> т —1 — — 2, 3) 2 3 4

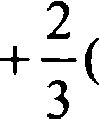
0,5a < 2 *— х;*

4) 2(3s — 1) < 3(4s + I) + 16,

4(2 + ) < Зт + 8.

Решение: Во всех вышеприведенных системах неравенств первое и второе неравенства не связаны друг с другом, поэто— му требуется решить каждое из этих неравенств по отдельно- сти, а затем выделить общие решения.

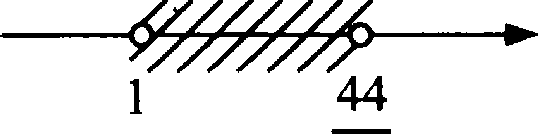
2т > 3 — 13a — 2

1) 22a > 33 — 13x + 2,

*х* т — 7) < Зх — 20 3 + 12( — 7) < 2(3 — 20);

6 9

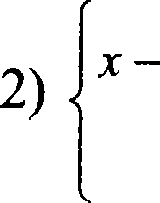
35a > з5, х > 1,

9s < 44; *х <* 44 

9 9

О т в е т: х l; 4 8

9

т + l т + 4< х —1 — 2, 2 3 4

1,5a — 2,5 < х;

12a — б(т + 1) — 4(x + 4) й 3(х — I) — 24,

1,53 — < 2,5;

123 — бт — 6 — 4 —16 Зт — 3 — 24, — —5, *х >* 5,

0,5a < 2,5; х < 5; *х <* 5.

0 Т В е Т: Нет решеННй.

*х +* l *х pp х* — — *х —* 2, б(т + 1) — 4 3(т — 1) —123 — 24,

3) 2 3

0,53 < 2 — ;

4 0,53 + < 2;

бт + 6 — 4 Зт — 3 —123 — 24,

1,53 < 2;

11a й —33, *х й* —3,

20 4

*х <* Х<—

15 3

—3 11

3

О Т В е Т: —3; 1-

3

4) 2(3 — 1) < 3(4 + 1) + 16,

4(2 + )< Зт + 8;

6s — 2 < 12a + 3 + 16, *--bx <* 21,

8 + 4 < 3 + 8; < 0;

> —3,5,

*х <* 0.

О Т В е Т: (—3,5; 0).

73

**3.ФУНКЦИИ**

* 1. Числовые фуRКЦин и их свойства

Трхгоноw‹юqрическиефунхции

1. Рассмотрим фуніщию *у —-* sш *х .* Область определения: *D(sin х) —- .* Область значений: *E(sinx) ——* [—1; 1].

Наименьший положительный период: *Т ——*2s.

Так как центральный угол, соответствующий полной окружности, равен 2s, то точки, соответствующие углам ‹х, (ct + 2s), (ct + 4s) и т.д., совпадают.

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, в частности относительно диаметра, лежащего на оси абсцисс, и равные по абсолютной величине углы при сим- метрии переходит в равные, то ординаты углов ct и (--о) проти- воположны, т.е. sin(—х) ———sin *х ,* т.е. функции sin *х* нечетная.

Точки пересечения с осямн. Из sin х ——0 получаем *х ——пи* точки пересечения с осью *Ох;* из sin 0 = *у* получаем *у ——* 0 — точка пересечения с осью 0y.

sin х > 0 при х е (2nL, п + 2M), k е Z ;

sin х < 0 при *х в п +* 2M, 2s + 2M), k е Z .

Наибольшее значение: sin х ——1 при *х= — +* 2i:,keE.

2

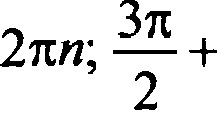
Наименьшее значение: sin х —— —1 при *х ——*-—+

2

2пл , л е Е .

Функция возрастает на промежутках

——+

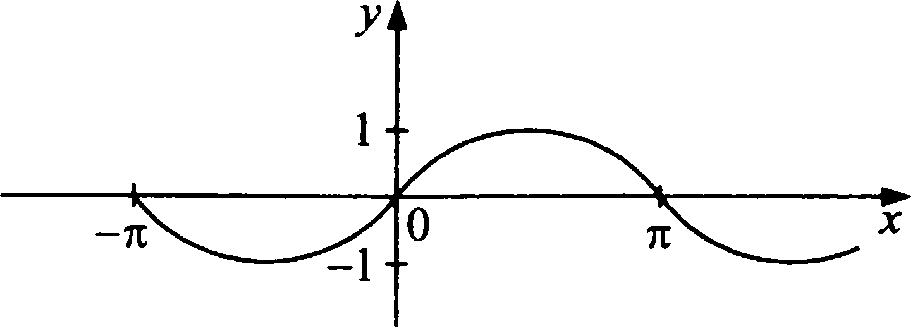
2



—+ 2

2пл; + 2пп , п е Н , убывает на промежутках 2

2пп , п е Z , график функціві асимптот не имеет.

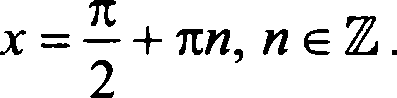


1. Рассмотрим функцию у = cosx .

D(cos *х) =* , 6(cos т)= (—1; 1 .

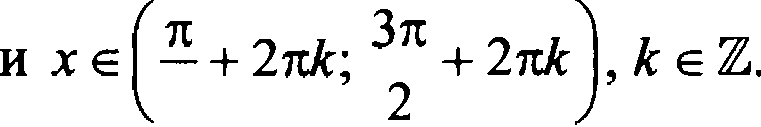
Наименьший положительный период: *Т —— 2r.*

Построим на единичной окружности точки *А* и *А',* соот- ветствующие углам п и (—-‹т). Так как круг симметричен отно- сительно *Ох,* а равные по абсолютной величине углы при симметрии переходят в равные углы, то точки *А* и *А'* симмет- ричны относительно 0s, следовательно, их абсциссы равны, т.е. cos(—т) = cosт , т.е. cosт четная функция.

Пересечение с *Ох:* найдем из уравнения cosx = 0, т.е.

Пересечение с : cos 0 = у у = 1. Промежуткн знакопостоянства:

cosт > 0 при

cosт < 0 пр

2

Наибольшее значение: cos х = 1 при х = 2пв, в е Н . Наименьшее значение: cos т = —I при х = п + 2пп, п о Z .

Функция возрастает на промежугках

[п + 2пв; 2s + 2пв], в е Z , убывает на промежугках (2пв; п + 2пп], п о Z , график функции асимптот не имеет.

1

0 *х*

1. Рассмотрим функцию *у ——* tgm .

Область определения — все действительные числа кроме точек т = — + m, п е Z .

2

Область значений *Е(tgx) —— ; + ).*

Наименьший положительньтй период *Т —— к:*

для любого х е *D(tg х)* справедливо

tg(т + п) = —sinx *= tg х ,* следовательно, п — период

—cosx

функции.

Пусть tg х ——0

sin х ——0

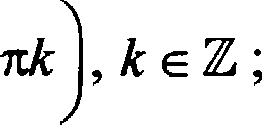
*х —- пи, п е d ,* т.е. п — наи-

меньший положнтельный период.

*tg(-x) —-* sin(—x) qq —sin х \_ — tg *х ,* функіщя непетная.

cos(—x) cosx

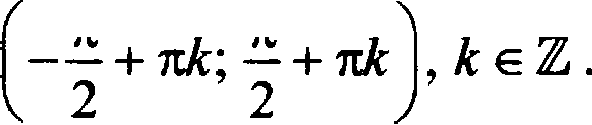
Пересепение с осью абсцисс найдем из уравнения tg *х -— 0 , х —— пи, п е d ; с осъю* ординат из tg 0 = у m у ——0.

tg х > 0 при *х е nk,* —+

2

tg х < 0 при *х е*

--+ 2

Функция не имеет наибольшего и наименьшего знапений. Свойство. Функция возрастает на каждом из интервалов

JJ о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим промежуток 0’

2

есь sin *х* возрастает, а cos *х* убыва- ет, поэтому 0 й sin х < sin х, < 1; *I* й cosx > cosx, > 0.

Поделив поиленно неравенства разньlх знаков, содержа-

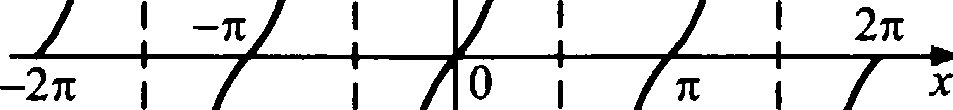
іщіе только положительные числа, получим 

cosт, cos xz

Аналогично доказывается возрастание на —2; 0 .

График имеет вертикальные асимптоты *х* = — + 

2



1. Рассмотрим функцию *у ——*ctgx .

Область определения — все действительные числа кроме точек *х —— uk, k е d,* й(ctg т) —— IN *.*

Наименьший положительный период *Т —— и.* Функция не- четна, аналогично tg *х .*

Пересечение с осью абсцисс найдем из

*ctg х* = 0 *х* = —+ 

2

Точек пересечения с нет, т.к. при х = 0 функция не оп-

ределена; ctg х > 0 при *х в nk;* —+х£

2

*k в Z;* ctg х < 0 при *х е* ——+

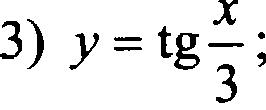
2

Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Функция убывает на каждом из интервалов (пл; п + nn), в е Z , доказательство аналогично доказательству для функ-

**Прнмер 1.** Найти область определения функции

 i

*сон х*

2) = 2

sin х

4) у = tg5x.

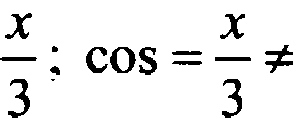
Решенне: Пользуется нашим знанием областей определе- ния тригонометрических функуий.

COSЈ

2) 2



и—+  2

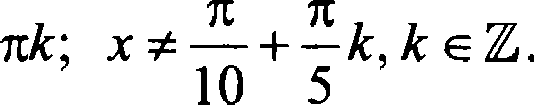
1. у = tg

0; — и —+

3 2

**nk;** *х* z Зг

2

1. у = tg5x; cos5x z 0; 5s р —+

2

О т в е т: 1) *х* —+

2

Зх

2

M,k е Е; 2) х х М, *k* е Е;

*— + —k,k*

10 5

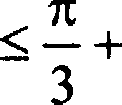
**Прнмер 2.** Найти область определения функции:

1) у = insz + 1 ; 2) у = cosx —1 ;

3) у = lg sin х; 4) у = 2 cosx —1 ;

5) у = l — 2sin х , *6) у ——* ln cos х.

Решенне: В данном примере рассматриваются области определения сложнмх функиий.

1. у = sin z + 1 ; sin х + 1 й 0; sin х *й* —I, *х в R;*
2. у = cosz —1 ; *шз х —* 1 й 0; *і:: s х й* I; *х ——*2M, *k в* Z;
3. у = lg sin х; sin х > 0; 2H < х < к + 2H, *k в 4;*
4. у = 2 cosx —1 ; 2cos х — I й 0

*сон х й*

2 '

2M *й х*

2M,keE;

1. у = 1 — 2 sin х , 1 — 2sin х й 0;

sin х

2'

— + 2H й *х*

6

 2M,keE;

6

1. *у —- А сон х, сон х* > 0; -—+

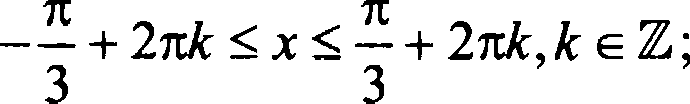
2

2Л < *х <* —+ 2V,kвE.

2

О т в е т: 1) х е *Ф,* 2) х ——2M, k е Н;

1. 2zk *< х < z +* 2кk, *k е d,*

4)

5) — + 2nk *й х* <—+ 2W,keE;

6 6

6)  2M < *х*

2 2

**Прнмер 3.** Найгіі множество зна•іений функцни:

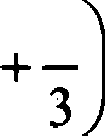
* 1. *у* ——2sin2z — cos2x; 2) у —— 1 — 8 cos2x sin2x;

1 + 8cos2 *х*

4

5) *у* —— 1 — 2Jcos тЈ;

4) *у ——* 10 — 9sin23x;

бу г = sin х + sin х

Решение: В данном примере пользуемся уже известными нам областями значений тригонометрических функций.

1)a = 

т.е. —1 3;

cos2x; у = 

(1 — 2sin2т) — 

2) у = 1 — 8cos2т sin2т; у = I — 2sin22z, т.е. —1 у 1;

= — + 2 cos 2 т , т.е. 9

4 4 4 4

4) у = 10 — 9sіп'Зт; 1 :f у 10;

1. у = I — 2Jcos тЈ; —1 1;
2. у = sin z + sin т + ,

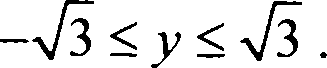
у — 2sin z +—

6

cos — ; = sin z +—

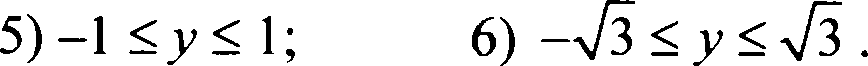
6

, т.е.



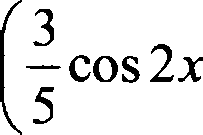
О т в е т: I) —1 й 33; 2) —l й у й I ;

9 4) l у 10;

4 4

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции у = 3cos 2s — 4sin 2s .

Решение:

у = 3cos 2s — 4sin 2т = 5 

где ‹р — arcsin з

—,

5

О т в е т: Јнаим' —5, ау ...б = 5.

4

—sin 2s 5

—

= 5sin(ip — 2s),

Пример 5. Доказать, что данная функция является перио- дической с периодом *Т,* если:

* 1. у = sin2x, *Т —— и,* 2) у = cos2 , *Т ——* 4я;

3) = tg2x, *Т ——*

2

4) у = sin 4 5

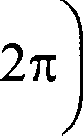
5 2

Решение:

1) *у ——* sin2x, *Т —— п; у х + Т) ——* sin(2(x+n)) = siп(2s + 2s) —

= sin2т = *у х);*

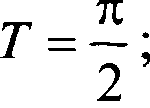
1. *у —-* **COS** , *Т=* 4r;

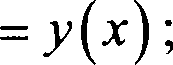
*у(х + Т) —* cos х + 4п = cos х

+

—

2 2

1. у —— tg2x,

= cos— 

2

*у(х + Т)* = tg 2 z +2 = *tg(2x+ п) = tg2x = у(х) ;*

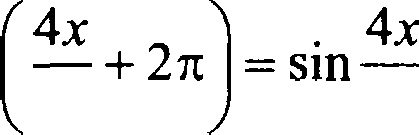
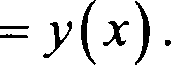
1. *у --* SIП 4

5

*у(х + Т) —* sin

5

2

4 х + 5 п = sin

—

—

5 2 5 5

Пример 6. Определить, является ли данная функция чет- ной или нечетной:

1) *у* = 2)

sin 2 х



1 + cos 2т

4) *у -— +* sin 2.Y 5) у ——3““;

COSX

Решение:

*6) у ——* zJsin тJsin'x.

*у(х) —* чет-

cos т‘



2)

1 + cos 2s

1 + cos(—2s) 1 + cos *2x*

= у(х) — четная;

1 + cos 2т

3 *y* cos *2x - х’ ( \*) '*

cos 2т — х'

*сон х —*

(т) — четная;

4)  

5) *—* з““„;—\*) з""'Л•) —\* °'нв ;

*———у(х) —* нечетная;

6) у ——xJsin хЈsіпЗт, —т) = —xJsin т-)

(—sin'z) *——Цх) —* четная.

О т в е т: 1) четная; 2) четная; 3) четная; 4) нечетная;

1. четная; 6) четная.

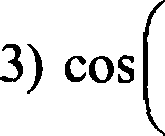
Пример 7. Используя свойство возрастания или убывания функции у = cos *х,* сравнить числа:

l) cOS z И cOS 8\* ,

—

2) cos 8я И cOS 103 ,

7 9 7 7

6к к

— И GOS — —

1. GOS — 8я

9\*

И GOS

7 8 7 7

1. cos 1 и cos3; 6) cos4 и cos5.

Решение: Используем свойства возрастания и убывания тригонометрическнх функцнй.

cos— и cos 8 . Так как функция cosx убывает на [0; к]

7 9

,то **GOS** — > **GOS**

7 9 7 9

2) cos 8я

103

и **cOS** . Так как cosx возрастает на (к; 2к] и

8я 103

7 7

7 7

, ТО GOS 

7 7

6< <

——

 GOS — Н t3OS **.Тахкаксоивоуастстна[-х:0]**

7 8

и — бк < к , то cos бх <cOs х

——

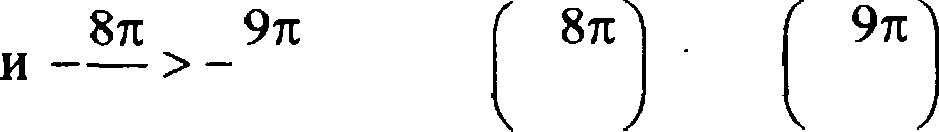
-—

7 8 7 8

1. cos — 8я и **cOS** — 9<

. Так как cosx убьюает на [—2к; —к]

7 7

7 7 **,7D OOS** - 7 **<COS** - 7

1. cosl и cos3. Так как cos *х убъ* на (0; к], а 1 < 3, то cosl » cos 3.
2. cos4 и cos5. Так как cos *х* возрастает на [п; 2п] и 4 < 5, то cos4 < cos5.

8< 103

О т в е т: 1) **GOS** — N **COS**

7 9

2) cos 7

< **cOS**

7

8< 9п

, 4) cos —

7 8 7

< cOS — ,

7

5) cos 1 > cos 3; 6) cos4 < cos5.

**Покязятельная функция**

Пусть а е IR, а > 0; *х в , mc а ——*1, то а' = 1 для любого х. Пусть а z 1. Для любого т е R можно найти рациональ- ные *р н q* такие, что q й *х < р.* Тогда числом а' будем считать

такое число, что

а’ й у = а' й *а\*,* где а > 1

*а й у -— а" й а’,* где 0 < а < 1 для всех *р* и q таких, что q й *х й р.*

Теорема 1. Если а > 0, а z 1, то *а" >* 0 для любого *х.*

С л е д с т в и е : если у 0, то уравнение а' = у не имеет

корней.

**Функция** у = Н (при а > 0, а z 1) называется *показатель- мой,* а — основание.

*D(a‘) —— , Е(а‘) ——* (0; +m).

Функция непериодическая, любое из своих значений она принимает ровно в одной точке. Функция не является ни четной, ни нечетной.

Пересечений с осью От нет; при т — 0, у = а' = 1, пepece- чение с осью в точке (0; 1).

Функция положительна при всех х, не имеет наибольшего

и наименьшего значений.

Функция монотонна; при а > 1 возрастает, при 0 < а < 1 убывает.

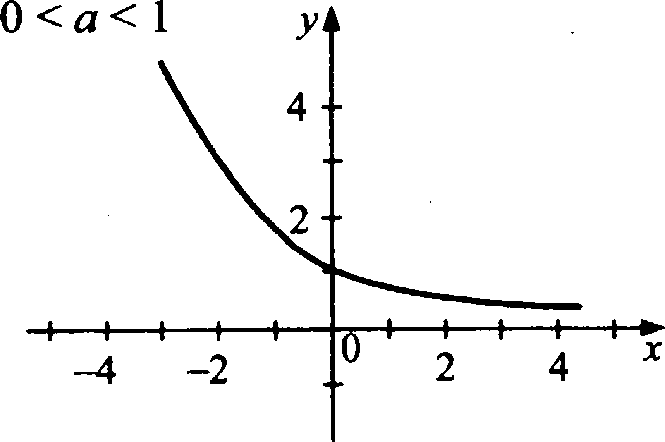
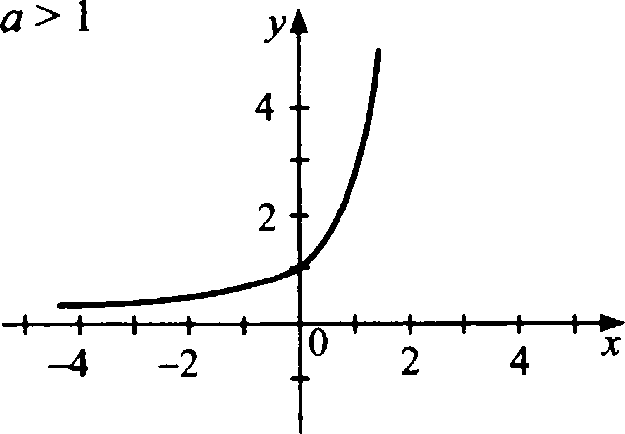
Пусть а > 1, *р* и q — рациональные; q < *р.*

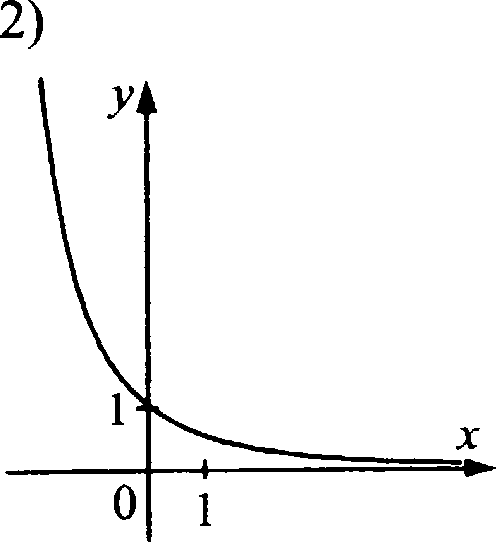
Тогда *а\** — *а’* ——*а’ $а\** — i); *а’* > 0; следовательно, знак разности *а\* — а’* определяется знаком *а\*" -* 1.

Пусть *р* — q —— > 0, тогда *а* > 1 m *а‘* > 1 *а * > 1 m

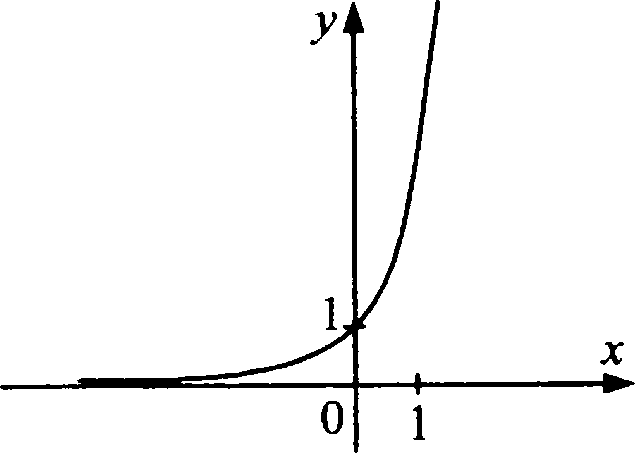
*а"* > 1, т.е. *а\** > 1 *а\** > *а’.*

Из определения степени числа с действительным показа- телем следует, что *а\** й *а’ жя р* > q; *р,* q е IX.

Равенства быть не может, т.к. уравнение *а" -— у всегяи* име- ет единственный корень. Асимптота графика у = *а" —* ось бах.

**Првмер 1.** Построить график функции:

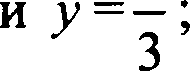
Решенне: i)

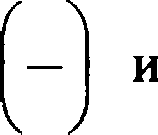


**Пример 2.** Найти координаты точек пересечения графиков

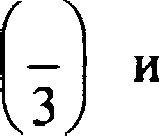
l) у = 2‘ и Ј = 8;

l



1 l

4

4) = i '

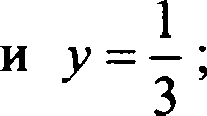
16'

у = 9.

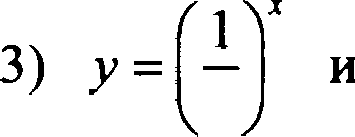
Решение:

l) у = 2" и у = 8 ; 2" = 8; 2‘ — 2'; т = 3, значит точка пе-

ресечения графиков (3; 8).

3" = 3“; т = —1, значит точка

пересечения графиков

4

## i i l i ' l

16' 4 16' 4 4 '

значит точка пересечения графиков 2; i

16

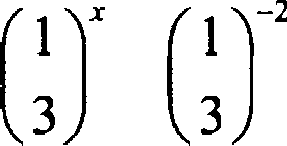
4) = l

—

l '

И ' ' ›

### = 9;

*,* т —— —2 , зна-

чит точка пересечения графиков (— 2; 9).

Нример 3. Используя графики фуніщий, решить неравен-

—I > 1;

2) 1 ;

2

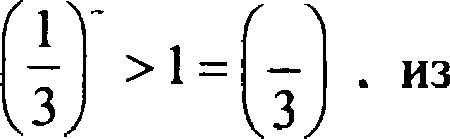
3) 5" > 5 ;

4) 5' <

5

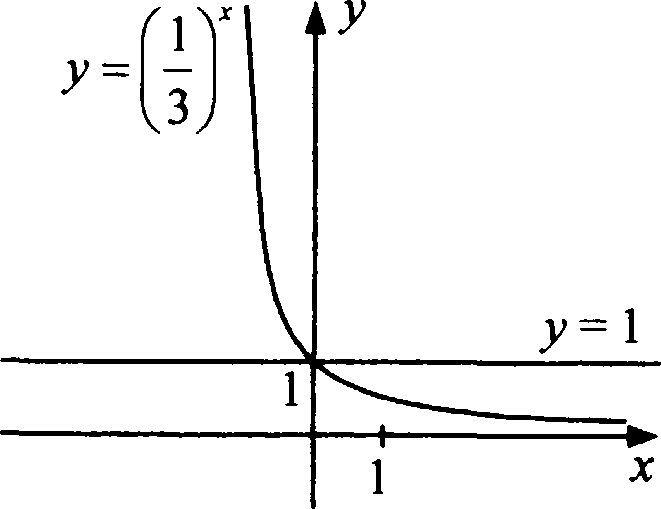
Решение: Построим графика функііий и наглядно решим неравенства.



*х <* 0 *.*

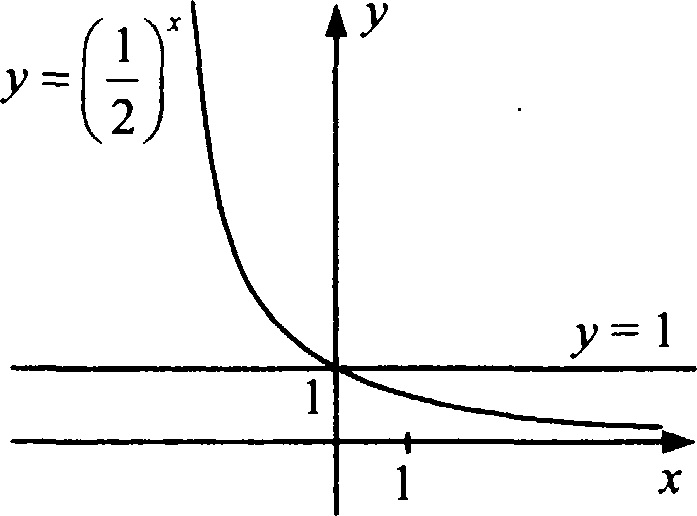
0

1. графика видно, что 3 > I при

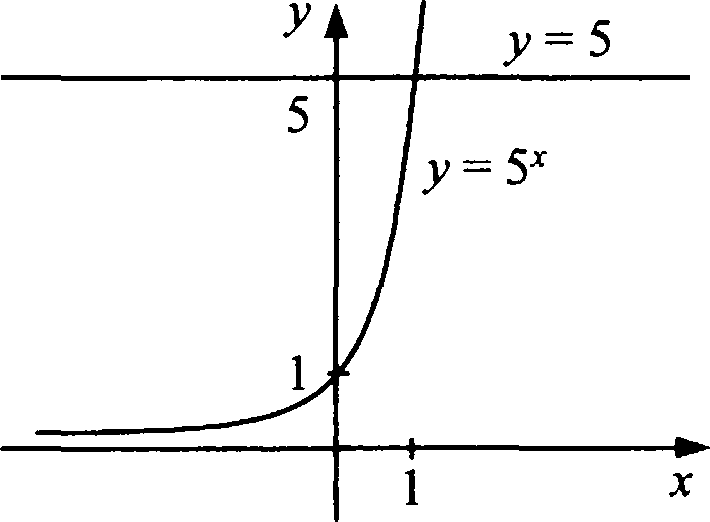


1. — < 1, из графика видно, что - < 1 при *х* > 0 .

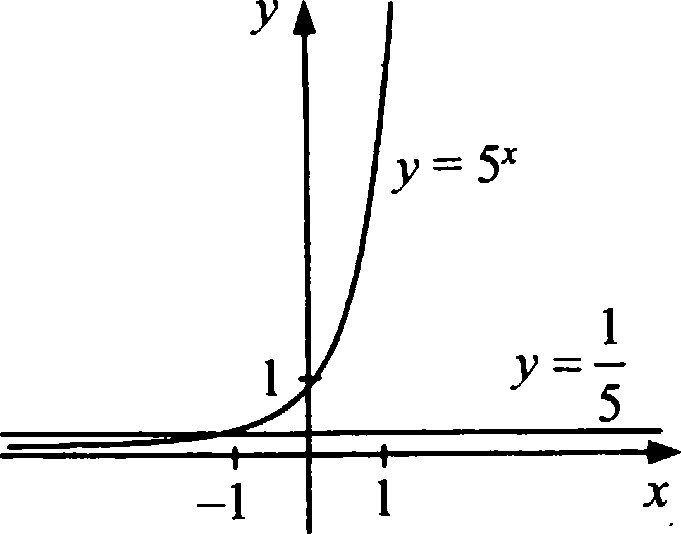
2 2



1. 5' > 5 , из графика видно, что 5' > 5 при *х* > 1 .



1. 5' < i = 5 ' , из графика видно, uтo 5' < 5" при х < —I . 5



О т в е т: 1) х < 0; 2) т > 0; 3) т > 1; 4) т < —1.

**Пример 4.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции *у ——* 2‘ на отрезке [—1; 2 .

Решение: Используем свойства показательной функции: Так как функция 2" — возрастающая функция, то на от-

резке [—I; 2] наименьшее значение она принимает при х = —1 ; а наибольшее при т = 2, значит наименьшее значение y(—1) = 2" = 0,5 , а наибольшее y(2) = 2' — 4 .

**Пример 5.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции *у -—* 2 на отрезке [—1; 1) .

Решение: Используем свойства показательной функции: поскольку функция *у —-* 2 симметрична относительно оси

ординат, а на отрезке [0; 1] 2 = 2', функіщя 2° — возрас- тающав, значит данная функция принимает наименьшее зна- чение при х = 0, у(0) = 2' = 1 и наибольшее при х = 1 или

х = —1, *у -I) =* 2' = 2 .

Логярві§мнческяя Qункцвя

‹fiункция внда у = log, х, п > 0, п z 1, т > 0, называется

*логарифмической.*

*D(1og,x)* = (0; + ‹ю) ; A(log х)= lR .

Функция не является периодической, четной или нечет- ной, так как определена только для х > 0.

Пересечение с осью *Oх.-*

lO = 0 т — 1, точка (1; 0).

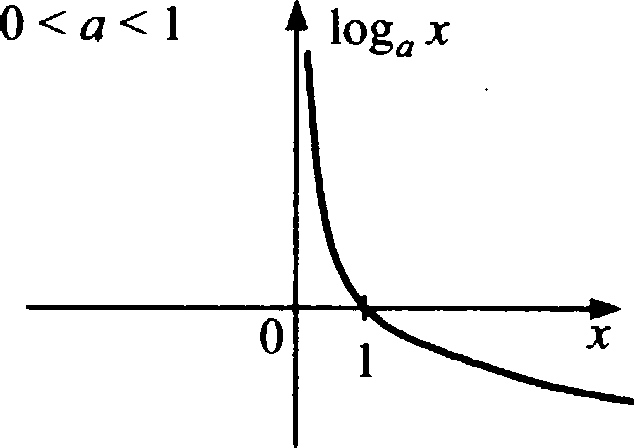
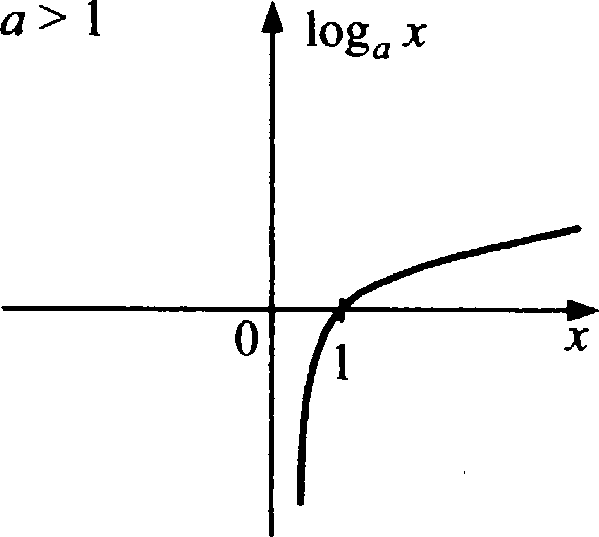
При *а* > 1 *у х)* > 0 при т > 1, т) < 0 при т е (0; 1).

При 0 < *а <* 1, т) > 0 при z е (0; 1), z) < 0 при z е (1; +m).

Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений. При 0 < *а <* i функция убывает на всей области определе-

ния, при а > 1 — возрастает.

Асимптота графика функции — ось ординат z = 0.



Нример 1. Вьыснить, является ли возрастающей или убы- вающей функция:

* 1. у = log 7, т ; 2) *у —-* logp z ,

3) у = lg х ; 4) *у ——* ln х .

Решение: Используем свойства возрастания убывания ло- гарифмической функции.

1. *у -—* log, ,7, z — убывающая, так как 0 < 0,075 < i ;
2. *у ——* logp х — убывающая, так как 0 < з

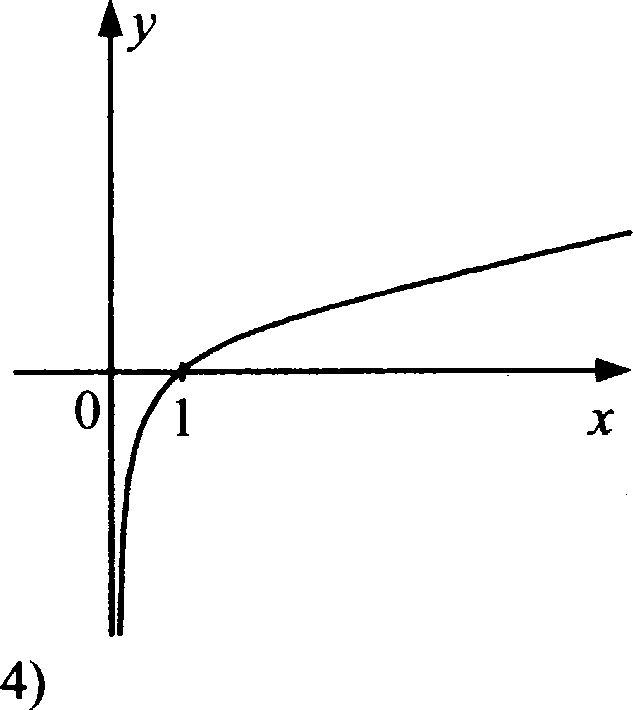
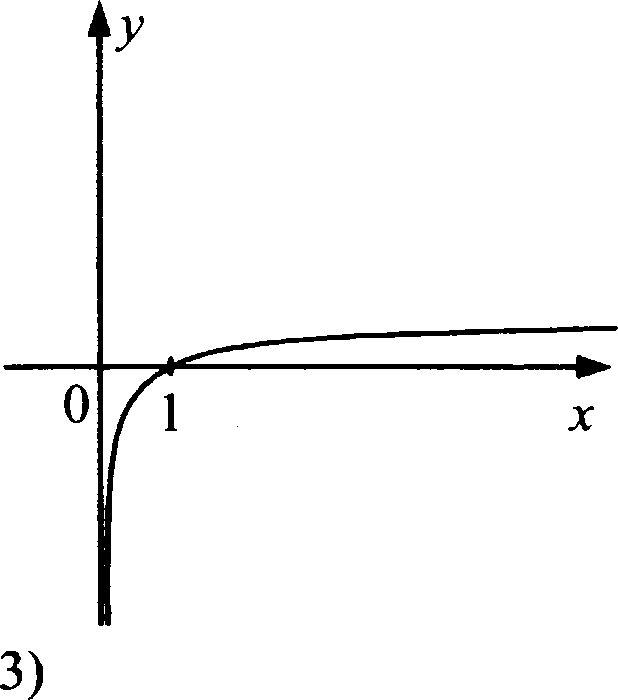
2

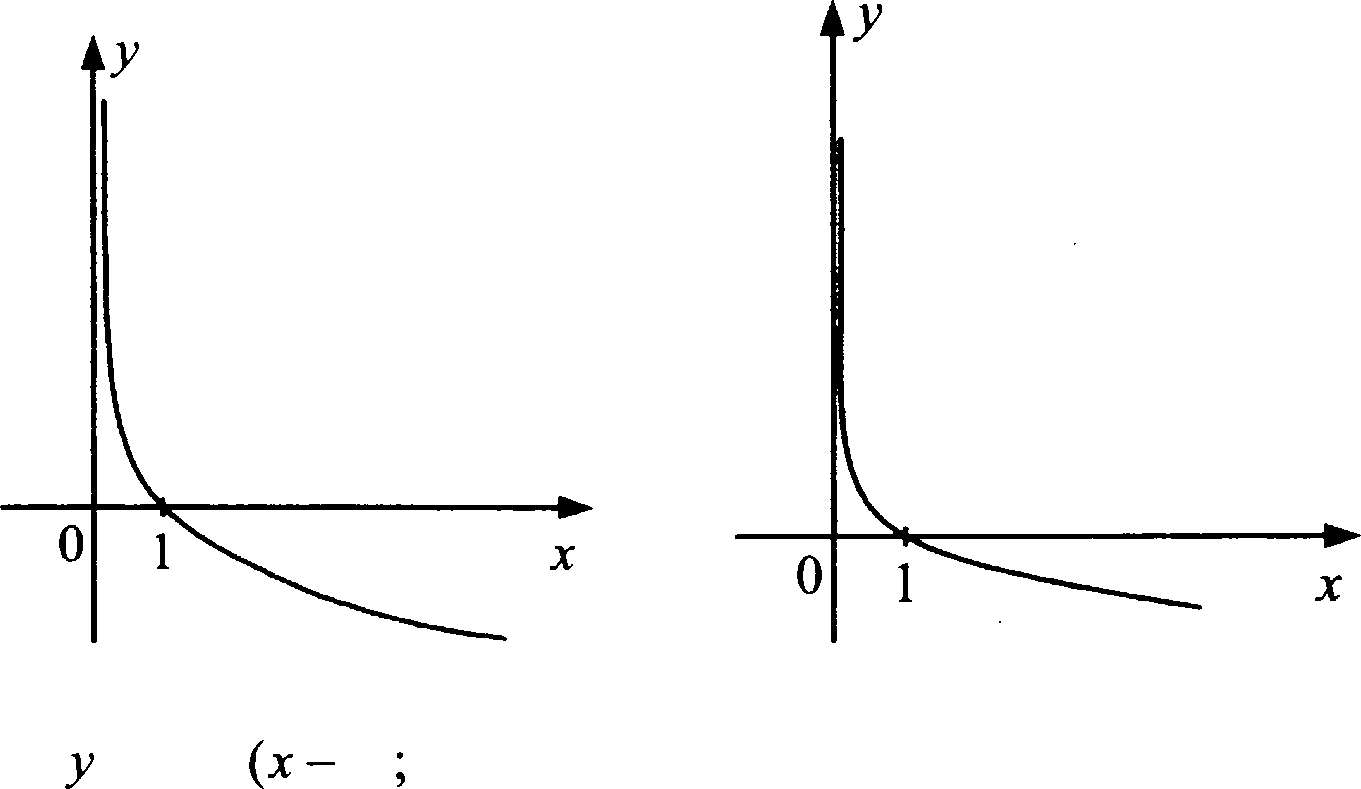
1. *у ——* lgm = log„ х — возрастающая, так как 10 > 1 ;
2. у = ln т = log, т — возрастающая, так как *е* > 1 . Пример 2. Изобразить схематически график функции:

1) у —— lgx; 2) у = lnx;

3) у —— log»,щ; 4) *у ——* log, т.

Решение:

1) 2)

**Прнмер 3.** Найти область определения функции: 1) = log4 I) 2) у = log, ,(1 + х) ;

3) = log,(x2 + 2s) ; 4) у = log (4 — x2 ) .

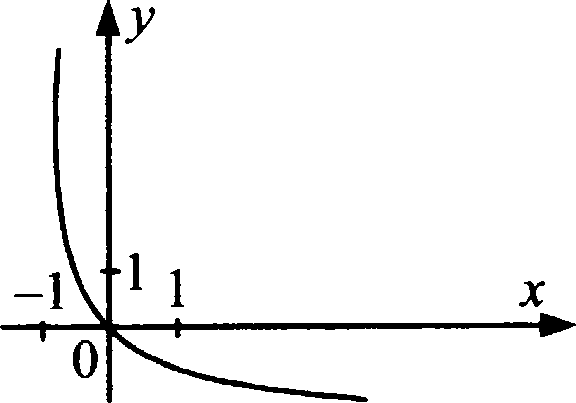
**Решение:** Используем то, что нам известно об области определения логарифмической функции.

1. у = log4 (х —1) — область определения х —1 > 0; *х* > 1 ;
2. у = log ,(I + *х) —* область определения 1 + *х* > 0; *х* > —1 ;
3. у = log,(x2 + 2z) — область определения *xc + 2x* > 0;

*х <* —2 и *х* > 0 ;

1. у = log (4 — x2 ) *—* область определения 4 *- x2* > 0;

—2 < z < 2.

**Пример 4.** ,fЈоказать, что функция *у —-* love $х' — I) возрас- тает на промежутке х > l.

**Решение:**

у = log (x2 —1) — *область* определения x2 —1 > 0; х < —1; *х* > I , так как *х* > 1 — входит в *область* определения и основа- ние логарифма 2 > 1, то данная функция возрастает на проме- жутке т > I .

**Пример 5.** Построить график функции, найти ее *область*

определения и множество значений:

1) *у —-* log,(х — l) ; 2) у = log, (х + I) ;

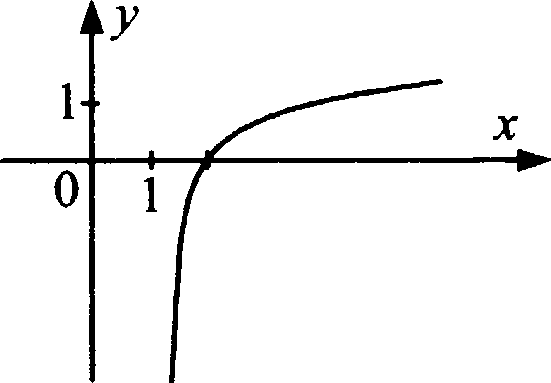
3) у ——1 + log, *х ;* 4) *у -—* log, *х —* l *;*

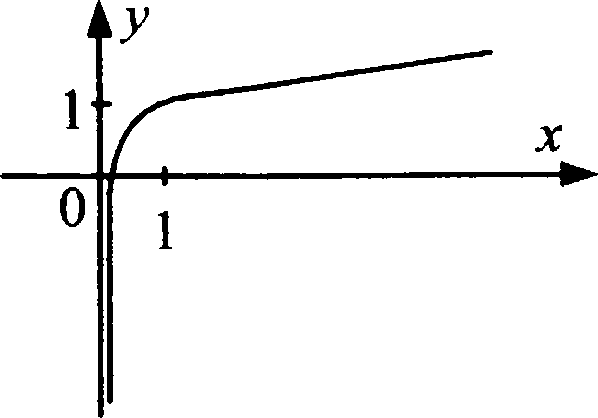
›

5) *у -—* 1 + log, (х —1) .

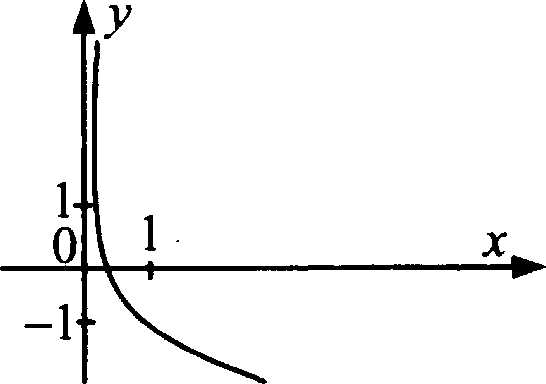
Решение: Построим графики данных функций и по rpa- фикам найдем *области* определения и множества значений исходных функиий.

* 1. *у ——* log (х — I) — *область* определения х — I > 0; *х* > 1 ; множество значений — множество IR.

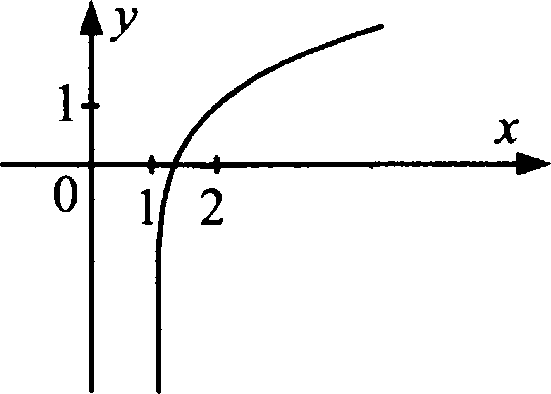


1. *у --* log, (х +1) — область определения х +1 > 0; *х* > —1 ; множество значений — множество П.
2. у = 1 + log, *х — me* оітределеівія *х* > 0 ; множество значений — множество IR.
3. у = log, *х — I —* область оітределения *х* > 0 ; юіожество

з¡іачений — множество .



1. у = l + log, (т — l) — область определения т — l > 0; z > l ; множество значений — множество IR.



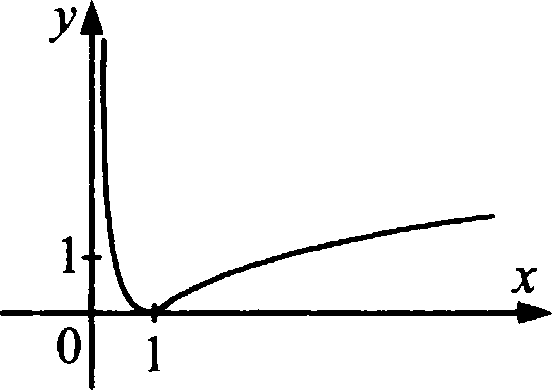
О т в е т: 1) область определения *х* > I ; множество значе- ний — множество IR;

1. область определения z > —1 ; множество значений — множество IR;
2. область определения *х* > 0 ;множество значений — мно-
3. область определения *х* > 0 ; множество значений — множество R;
4. область определеиия т > 1; множество значений — множе-

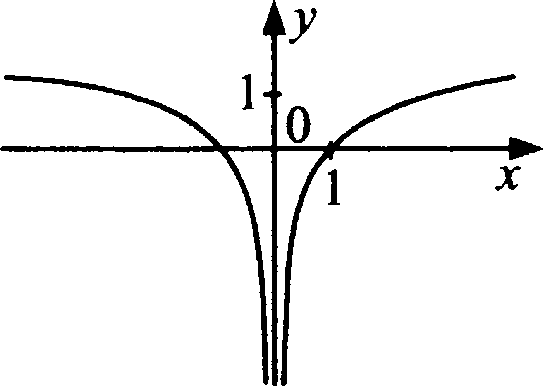
Нример 6. Построить график функции, найти ее область определения и множество значениіі, указать промежуткн мо-

3) *у -—* log, 3 — х , 4) у —— l — log, т) .

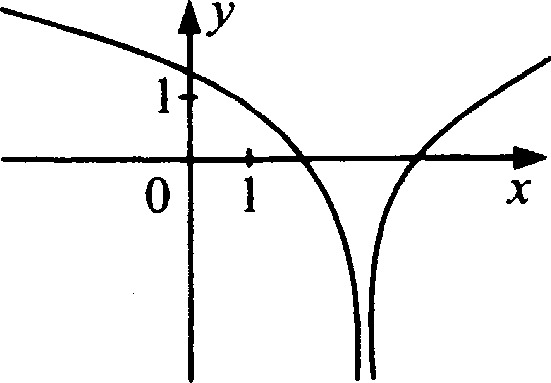
Решенне: Построим графики данных функцнй и графиче- ски найдем требуемые в условии задачи ответы.

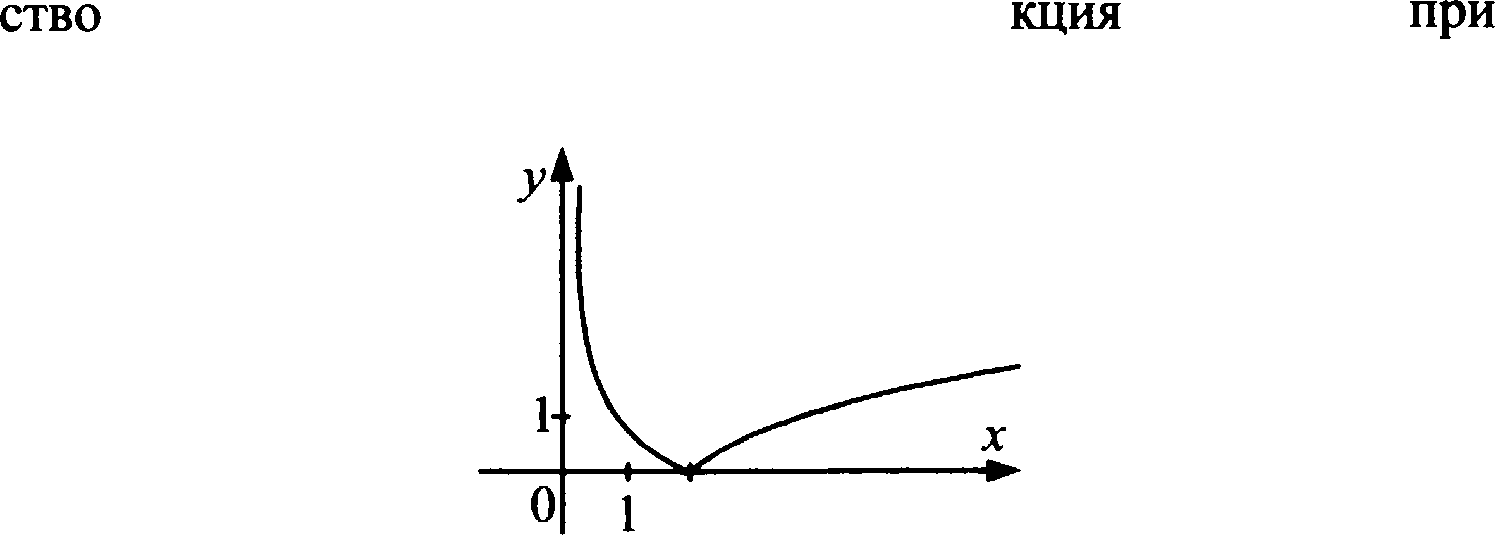
* 1. у —— log *х —* область определения — т > 0, множество значений *у* й 0 ; данная фуніщия убывает при 0 < *х й* 1, воз- растает при *х* > i .

1. *у ——* log х *—* область определения — множество IX, кроме х ——0 ; множество значений множество JR, данная фуніщия убывает при *х <* 0, возрастает при *х* > 0.



1. у — log 3 — х *—* область определения — множество he, кроме х ——3 ; множество значений множество R, данная функция убьжает при z < 3, возрастает при *х* > 3.



1. у —— 1 — log, *х —* область определения — х > 0, множе- значений — у > 0, даннав фун убывает

0 < х < 2, возрастает при *х >* 2 .

О т в е т: 1) область определения *х v* 0, множество зна- чений у 0 ; данная функіщя убывает при 0 < х й 1, возраста- ет при х > 1 ;

1. область определения — множество IR, кроме х = 0 ;

множество значений — множество IR, данная функция убы- вает при х < 0, возрастает при х > 0 ;

1. область определения — множество IR, кроме х = 3;

множество значений — множество IR, данная функция убы- вает при х < 3 возрастает при х > 3;

1. область определения х > 0; множество значений

*у* й 0, данная функция убывает при 0 < х й 2, возрастает при

322.

* 1. Нроизводняя ‹функции

О п р е д е л е н и е . Пусть некоторая функция *f(х)* опре- делена на некотором промежутке *I, xi —* точка этого проме- жутка, число *h w* 0 таково, что z + *h* также принадлежит про-

межутку *І.* Тогда *производной функции f х) в точке xi*

называется предел разностного отношения *f ' x+ h) — f xi)*

*’*

*h*

при *h ---+* 0 (если этот предел существует).

Производная функции *f(х)* в точке т обозначается *f’ xi) .*

Если функция *f(х)* имеет производную в некоторой точ- ке т, , то данная функция называется *Ьиффереицируемой в этой точке.*

Если функция *f(х)* имеет производную во всех точках

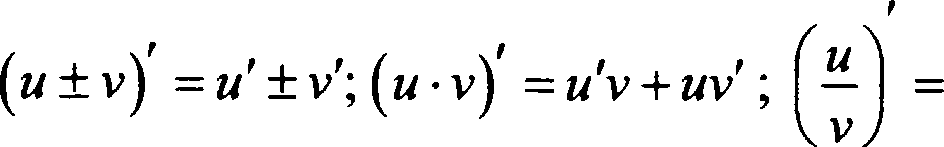
некоторого промежугка, то данная функция называется *Ьиф- ференцируемой па этом промежутке.*

Геометрический смысл производной некоторой диффе- ренцируемой функции заключается в том, что значение произ- водной функини в некоторой точке равняется угловому коэф- фициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

Уравнение касательной к графику функции *f(х) ,* диффе- ренцируемой в точке т , имеет вид *у —— f’(xi) х — xi)+ f xi) .*

Производные элементарных іЈіункций

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| *у —— с* | *у’ ——* 0 | *—— Ю + b* | *- D* |
|  |  |  |  |
|  |  |  | \_ l  2 |
|  |  |  |  |
| *у -—* ln z |  | lo8° = | l  *y’ —-* z lпn |
| *у ——*sin z | *у* ——cosl | *у* = cosl | *у’* = —sinz |
|  | \_ i  *y* cos т | *у ——* ctg z |  |
| у —— arcsiп z | *У’ -—*  31 — <' | *у ——* жccos *х* | *у’ -— —*  l— -г' |
| у = arctgx | l + . | *у = жcctg х* | *—* + . |

Если в точке х существуют производные функций п(х) , v(x) , то справедливы соотношения:

ШV-ШV

V’'

Нример 1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции *у ——А• )* в точке с абсциссой ‹о:

1)A\*J —<' <о' 1; 2)7t•l ——siвx› <о' 4'

3)7t‹ J ——lnr. ‹о = 1; 4)7t•l ——*е‘,* =о= ln3.

**Решение:** Пользуюсь геометрическим смыслом производ- ной функщіи, найдем искомые угловые коэффищіенты каса- тельных:

1)f'(x) ——3s'; I = tg ‹х =,f' =ol = 3 - 1' = 3;

2)f'(x) —— cos х;

I = tg ‹х =:t' (xo1

cos —“

4 2

3)f'(x) —— ;

4) *f'(x)* = е‘;

О т в е т: i) 3; 2)

*k ——* tg п *= f’* ‹oJ = = i;

£ = tg п *= f’* ‹о) = е = 3. 2 , 3) 1; 4) 3.

**Пример 2.** Написать уравнение касательной к графику функции *у ——1i•)* в точке с абсииссой z = 0:

1) *f(х) —— х*

2)7t•) = sin2x — In(x+1).

Решение: Пользуемся известным нам уравнением каса- тельной к графику функции в данной точке:

1)7t0) = 0+ о +1 =1,f’(x) —— l—

= 0 ( — 0) + 1, = 1;

\*+1)z *,f'(0)* = l—

= 0,

2)7t0) = sin 0 — ln 1 = 0 *f’(x) -—* 2cos 2x —

*f’(0)* = 2cos 0 — — 1, *у ——* 0 + l - (х — 0), *у —— х.*

О т в е т: 1) у = 1; 2) у = х.

Пример 3. Найти точки графика функции у *•1t•),* в кото- рых касательная к этому графику параллельна прямой = А:

1)71= —— е' + е °, k —— 2; 2) *f(х) ——* Зх + 1, k = 3

4

3)7Іх) = sin2x, k = 2; 4)71= = *х* + sinx, I — 0.

Решение: Найдем угловые коэффициенты касательных к

графикам данных функций и приравняем их к исходным (то- гда касательная будет параллельна данной прямой). Далее ре- шим полученное уравнение.

1) k = tg п *- f’(x); f'(x) = е" — е", f'(x)* —

3 3

, т.е. е —е”

2 2'

2e“ — Зе — 2 — 0 — это юзадратное уравнение относительно *е ,*

*D ——*9 + 16 = 25; *е ——*  + 5

4

= 2 z = ln2, *е* = — 5 = 1 но

4 2

——

*А\** 2 е'“' + e‘“ 2 — 2 + 

2) k = tg п *= f’(x), f’(x) ——*

, искомая точка: ln 2; 

3

4

т.е.

2 Зх + 1

4 Зх + l = 2,

3s + l = 4, *х ——* 1 f(I)*=* 3 -1 + 1 = 2 искомая точка (1,2).

3) k = tg п *——f'(x), f'(x) ——* 2cos *2x, f'(x) ——* 2, тогда 2cos 2x = 2, cos 2x — l 2x = 2пп, в е Н . т = пв, в е Н , sin(2nn) = 0,

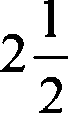
**HCKOM bIe ТОНКИ:** (7ІП; () , П С Н .

4) I = tg п *=f’(x),f’(x)* —— l + cos *х, f'(x) ——*0, т.е. l + cos *х ——* 0,

cos т = —l *х* — к + 2пп, п е Н i 7I• + 2кu) = к + 2кп +

+ sin (п + 2кп) = к + **2кв,** п е Н ; искомые точки: (п + 2пв; к +

+ **2кп),** п о Н .

О т в е т: 1) In 2;  3) (nn; 0), в е Н ;

4) (к + 2кп; к +2кп), п е Н .

Физический смысл производной заключается в том, что производная от координаты по времени есть скорость (при

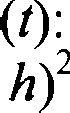
движении материальной точки, заданном координатным зако- ном движения).

Пример 4. Определить скорость тела, движущегося по за- кону s(/) *——* f2 + 2, в момент времени:

1) *t —— 5,* 2) i = 10.

Решение: Пользуясь физическим смыслом производной,

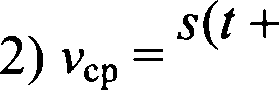
решим данный пример:

*s(t) ——* i2 + 2. Найдем v

1) s(i + *h)* — s(i) = (i +

— 2 = 2i6 *+ h2 ;*

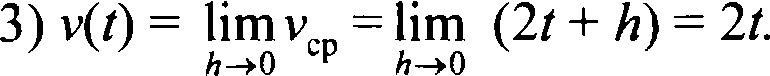
+ 2 i2 — 2 — i 2 + 2іЬ + *h2 +* 2 — i 2 —

 *h) — s(t)* 2th *+ h2*



*h h*

= 2i + *h;*



1) i = 5, v(5) = -2

5 — 10; 2) i = 10, v(10) — -2

10 = 20.

О т в е т: 1) 10; 2) 20.

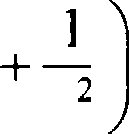
Пример 5. Найти производную функции:

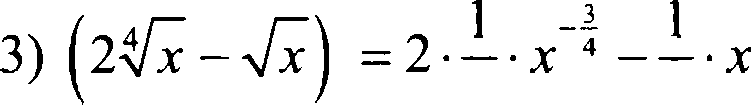
1) х' + ——у ; 2) хЗ +

3) 2% — ; 4) 3% + 7% .

Решение: Пользуясь тем, что производная суммы двух функ- ций есть сумма производньт этих функций, решим эют пример:

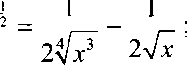
1) х' + = 2s — 

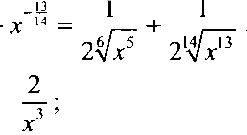
2) х 2

4 2

4) (36 7'Y) - з - — х +

6



l

14

О т в е т: 1) 2x — 

 1 \_ 1 4)

2 2

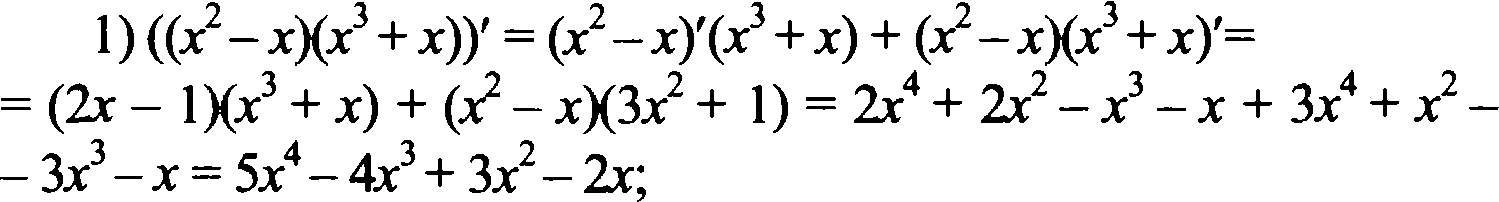
2) 3x2 —

I l 2% + 2'%

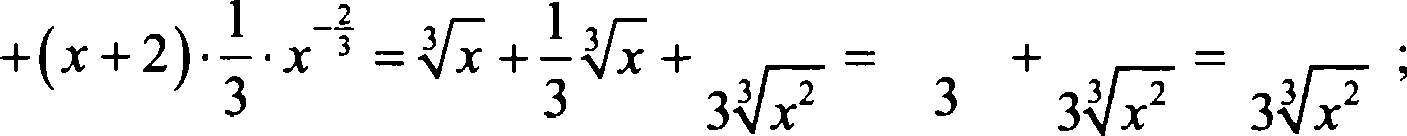
**Прнмер** 6. Найти производную функщіи:

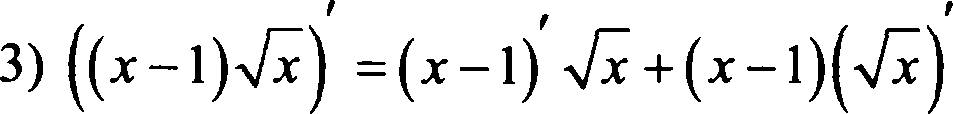
1) ( 2 — )( ' + ); 2) ( + 2)3 ; 3) ( — 1)3 .

Решенне: Пользуясь формулой для производной произве- дения двух функций, получим:

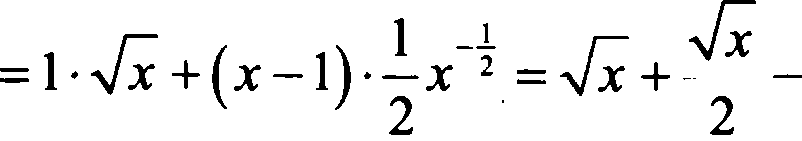


2) $(х + 2);/i) -(х + 2) +(х + 2) ;fi) = i і?‹+

 2 4 2 4 + 2



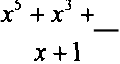
1 ЗА 1 3 —1

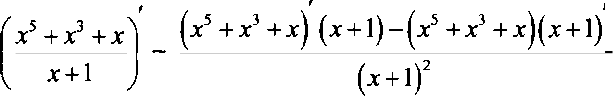
2 2 2 2

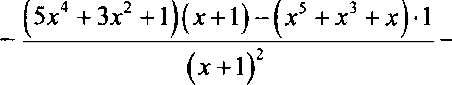
О т в е т: 1) 534 — 4s' + 332 — 2x; 2)

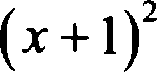
3 —1

**Прнмер** 7. Найти производную фуніщии:

; 2) 

Решенне: Пользуясь формулой для производной частного двух функций, получим:

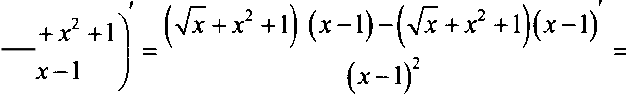


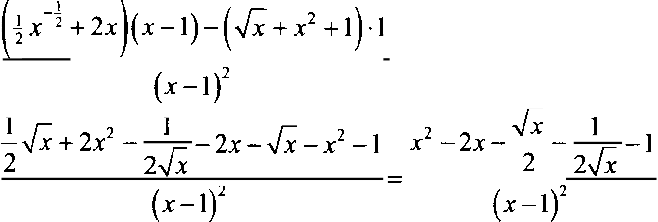
5s’ + 3s' + х + 5s‘ + Зт' + 1 — х’ — х' — х

4 + 5 + 2 ' + 332 + 1



( + 1)'

2)

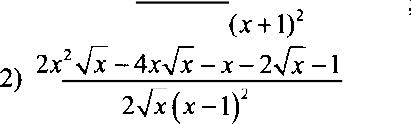


*2х 2 ix —* 4x — х — 2 1

2f( — 1)z

5 4 + 2т' + 332 + 1

43 + 53

О т в е т: 1)

Производная фуніщии вида *у —- f(ах+ b)* равна

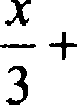
*у’ ——af’ ах+ b) .*

Фуніщия вида *f g(х))* называется *слоэюной* функцией. Производная сложной функции находится по формуле:



**Пример** 8. Найдите производную функции:

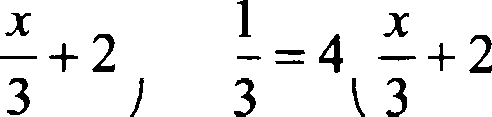
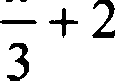
1) ——(4 — 9) ; 2) —— 2 ,

14

3) у = (5т + l )9; 4) = 

4

Решение: Пользуясь формулой для производной функции вида у *•1i«•• + b),* найдем производные данных функций:

1) = (4 — 9) , *у’ ——* 7 4x — 9)6 - 4 = 28(4т — 9)6;



*3) у ——* (5s + 1) ,

14

4) —— — 2

4

*у’ ——* 45(5s + 1)8;

, 7 *ху* Із

—2

2 4

*—*

О т в е т : 1) 28(4s —

9)6;

2) 4

*x* + 2 ,

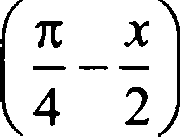
3) 45(5 + 1)8’ 4)

7 *х*

2 4 -2

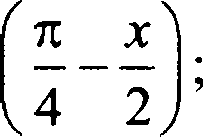
Пример 9. Найдите производную функции:

1) у ——cos(5s + 9); 2) у —— cos —4s ;

3) *у ——* cos(9s — 10); 4) у = cos

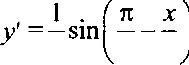
Решение: Решение аналогично решению примера 8. 1) *у ——* cos(5т + 9), *у’ ——* —5sin(5s + 9);

2) у —— cos — —4s , у' ——4sin — — 4s ;

3) *у ——* cos(9т — 10),

4) у —— cos

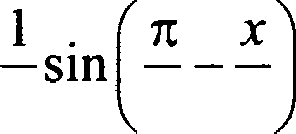
*у’ ——* —9sin(9s — 10);

2 4 2

О т в е т: 1) —5sin(5s + 9); 2) 4sin — 4т ,

3) —9sin(9s — 10);

4)

2 4 2

* 1. Исследование функций с помощью производной

**Hasoчmeниeпpowe тковмохотонномхфункции**

Если *f'{х)* > 0 на некотором промежутке, то функция во: растает на этом промежутке.

Если *f’ х) <* 0 на некотором промежутке, то функция

убывает на этом промежутке.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

 i

+ 2

з *= —* \*— з;

Ретение:

2) —— 1 + 

4) *у ——*1 + 3 — 5.

*х о* —2, *у’* > 0: —

*' —— cx!* 2 *x* + 2)2

> 0 — не выпол-

няется ни при каких *х е ,* так как *х +* 2)2 > 0; *у’ <* 0:

1 < 0 — выполняется при всех х о *&,* исключая *х ——* —2,

*(х +* 2)2

функция убывает при х < —2, *х* > —2;

2 *, х о* 0, *у’* > 0: — 2

2

*x 2*

> 0 — не вьпіолняется ни при

каких т е R, так как т2 > 0; у' < 0: — 2

2

< 0 — выполнвется при

всех *х е ,* исключая т — 0, функция убывает при т < 0, т > 0;

3) Ј' = —

2

1 , > 3, > 0:

— 3

0 — не вьтолняет-

ся mr при каких *х е , кш —* 3 >0; < 0:  0 —

вьтолняется при всех т > 3, функция убьюает при т > 3;

4) *у' —— , х* > *5, у’* > 0:

3

2 т — 5

при всех х > 5; < 0: < 0 — не вьшолняется ни при ка-

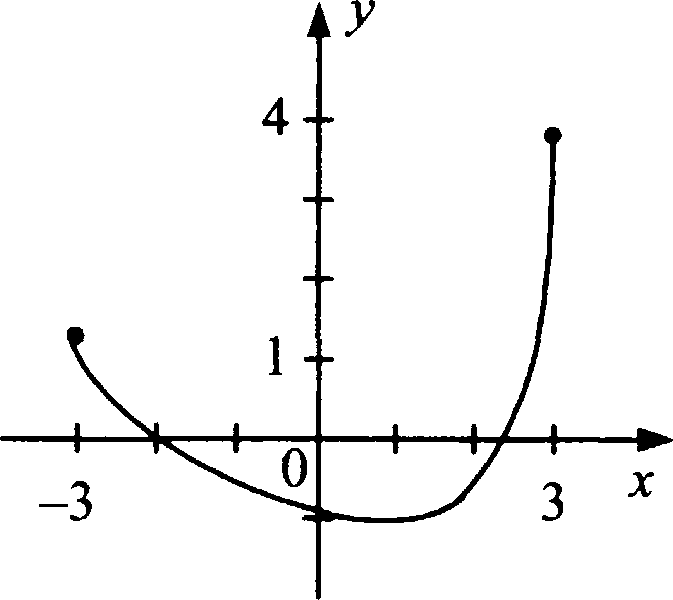
ких т е R, так как *- 5* > 0; функция возрастает при т > 5.

О т в е т: 1) функция убывает при т < —2, *х* > —2;

1. функіщя убывает при т < 0, т > 0;
2. функция убывает при т > 3;
3. фуіікция возрастает при т > 5.

**Прямер 2.** Изобразить эскиз графика непрерывной функ- ции *у ——9• ),* определенной на отрезке *Дa; b ,* если *а —— —3, b —— 3, A—!) —— !• А!) ——* 4, 7f 2) < 0, *f'(2)* = 0, *f'(x)* < 0 про *—3 < х <* 2,

*f’(х)* > 0 при 2 < х < 3.

Решение:

Нахождение экстремумов функции, наибольшего и наименьшего значений функции

О п р е д е л е н и е . Touкa ‹о называется *точкой максимума* 'tm"ui"' *——9• • тяп* существует такая окрестность тоики ‹о, •» при всех т г х из этой *о ‹::ru•=• A•* <7t<o)-

О п р е д е л е н и е . Точка х называется *точкой минимума* функции у *• 9 • ),* если существует такая окрестность точки х , что при всех т г х из этой окрестности 7І‹ >7t=•

Точки максимума и минимума функции в совокупности называются *точками экстремума* этой функции.

Теорема. Пусть *9• —* дифференцируемая функция, тогда

если ‹о — точка экстремума этой функции, то *f’(xi) ——*0.

Те точки, в которых производная функции равна нулю, на- зываются стационарными.

Теорема. Пусть фyнкIjия Цz) дифференцгіруеиа на инzер-

вале *а, b), х е (а, b) н f'(x,)* ——0. Тогда:

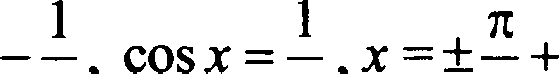
1. если при переходе через точку х функііии 7I‹ ) ее произ- водная меняет знак с «+» на «—», то х — точка максимума функции 9 • )
2. если при переходе через точку ›о t •г•кции1і• ) *ее* произ- водная меняет знак с «—» на «+», то ›о — точка минимума фуніщии т).

**Пример 1.** Определите промежутки монотонности и точки

экстремума фуніщии:

2 , 2) = 

3) = —х + cos т . 2

Решенне: Нользуясь сформулированными выше свойст- вами, имеем:

1) у = sin х 

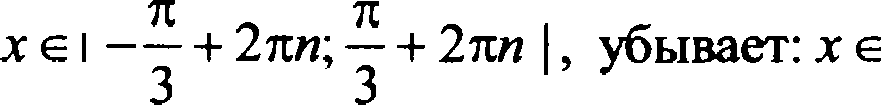
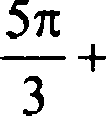
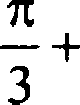
2

, /'=COSI

2 2 Z

2пп;

х = — + 2яп — min; т = + 2яп — max; у возрастает при

  2хп;

2) = =—+ sin т ; т = *(—* I )k+ *I* — +

2пв

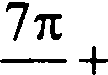


2

i=--+ 2яп — min; т = 7<

6

+ 2пв — max;

6 6

возрастает: т е —— + 2хп;

6

6 2пп ,

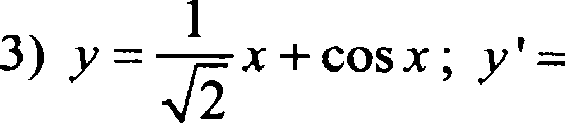
убывает: х е

7< + 2пв;

6

+ 2яп

6

2 — sin х; *х - —* I) k — +

2 4

т = — + 2пв — max; т = З + 2яп — min;

—

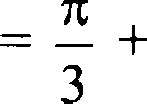
4 4

 - + 2кв; — + 2кв ,

4 4

возрастает: т о

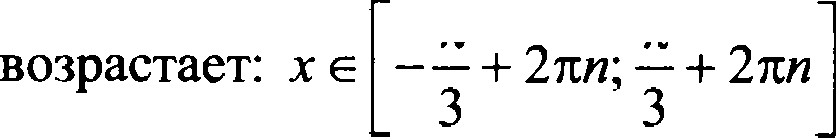
Зя +2 ; 9 +2mn

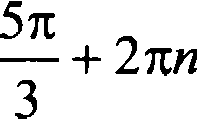
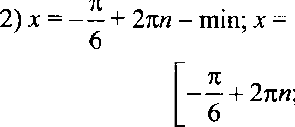
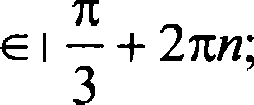
4 4

О т в е т: 1) т

2яп — min; х

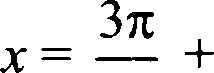
2яп — max;

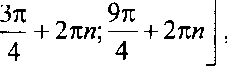


убывает: х 

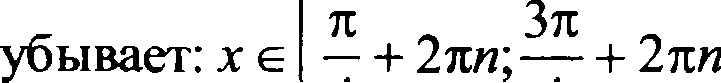
возрастает: х е

7к 6

 = — + 2пв — max;

4

возрастает: х е

4 4

7< + 2яп — max;

6

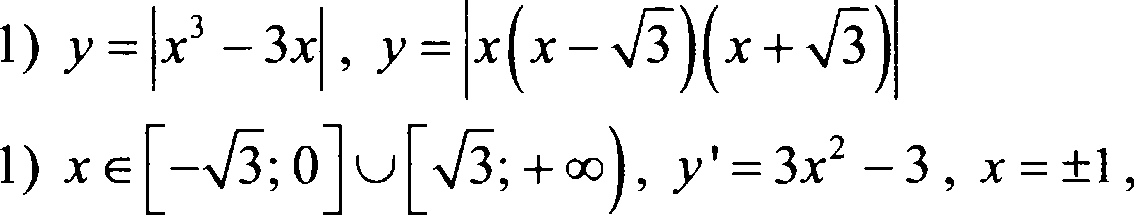
7x +2дп , 6

+2zn

2пв — miп;

4

Прнмер 2. Определите промежуткн монотонности и точки экстремума функции: у = х' — Зх

Решение: Решение данного примера полностью аналогич- но решению предьцlущего примера.

возрастает. ( — 3, — I] $3, + •), убывает. [—1, ОД , х = —1 — max,

2) х е $——‹ю, 3$ $0, 3$ , у = 'х xc’ у' = 3 — Зх , х = +1,

возрастает: ДO; 1 , убьюает: $-—‹ю; 3$ $1; + 3 , х= 1 — max.

О т в е т: х п $-—‹ю; — 3$ —i; ОД $1; 3$ — убывает ,

х о $—3; 1$ 0; 1) $3; + m$ возрастает, х = +3, х — 0 — min , *х* = +l — max .

Построение гра‹}іиков ‹Јіyнкций

Для построения графика некоторой функііии сначала нуж- но исследовать свойства функции при помощи ее производной и затем, используя эти свойства, построить график исходной функции.

Qля построения графика четной (нечетноіі) функции доста- точно исследовать свойства этой функции и построить ее гра- фик при х > 0, а затем симметрично отразить график функции относительно оси ординат (начала координат соответственно).

Нример 1. Построить график функции: 1) у = х' — 332 + 4;

2) у = 2 + Зт — х';

3) у = —xc + 4x — 4т.

Решенне:

1) у = т' 3x2 + 4;

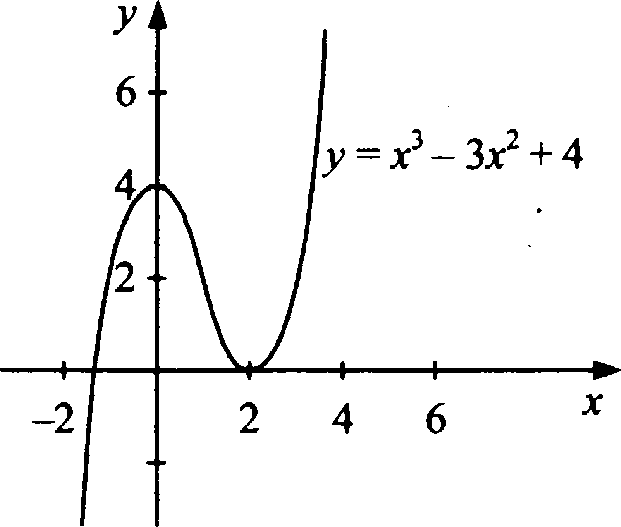
1. Область определения — множество Я;
2. у' = Зх 6т;

3. у' = 0, Зх(т — 2) = 0, х 0, *х ——* 2;

4. у’ > 0, *х <* 0, *х* > 2 — возрастает; у' < 0, 0 < т < 2 — убы— вает;

5. z = 0 — точка max, так как при переходе через нее меняется знак у' с «+» на «—». ДO) = 4, х = 2 — точка min, так как при пере- ходе через нее меняется знак у’ с «—» на «+». 2) = 8 — 12 + 4 = 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| < | \_< < 0 | 0 | 0 < < < 2 | 2 | < > 2 |
| *f’(x)* | *+* | 0 | — | 0 | + |
|  |  |  |  |  |  |



2) ——2 + 3 — 3;

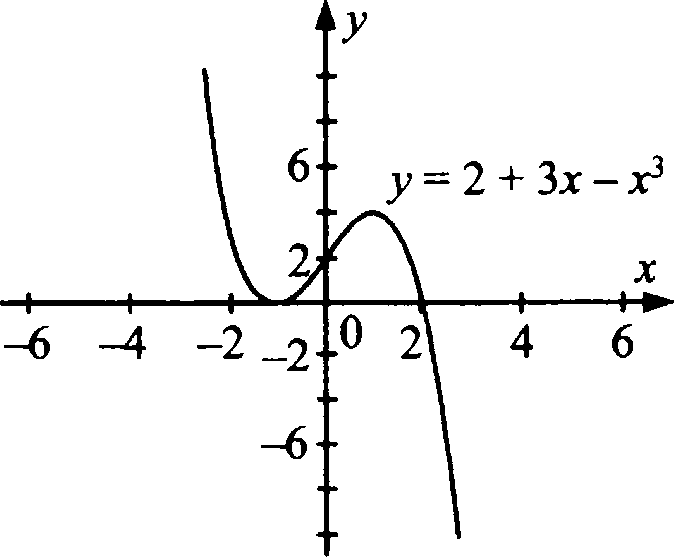
1. Область определения — множество lR ; 2. ’ ——3 — 332;

3. *у’ ——*0; 3(l \_ x2=) 0; т2 \_ l = 0; т = 1, xz = —l;

4. *у’* > 0; т2 < 1; —1 *< х <* I *; у’ <* 0; т2 > l ; т < —l ; х > 1;

5. х = —1 точка минимума А—l) = 2 — 3 + l = 0, х = 1 — точка максимума А l) = 2 + 3 — 1 = 4.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 0 |  |
|  |  |  |  | 4 |  |

10

3) *у ——* —хЗ + 432 — 4т;

—10

1. Область определения — Ifi; 2. *у’ ——* —332 + 8s — 4;

3. ’ = 0; 332 — 8 + 4 = 0, *D*

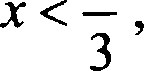
4

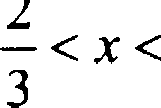
4 + 2

3 =2,

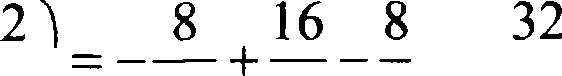
= 16 — 12 = 4;

4. *у'* > 0; 332 — 8т + 4 < 0,

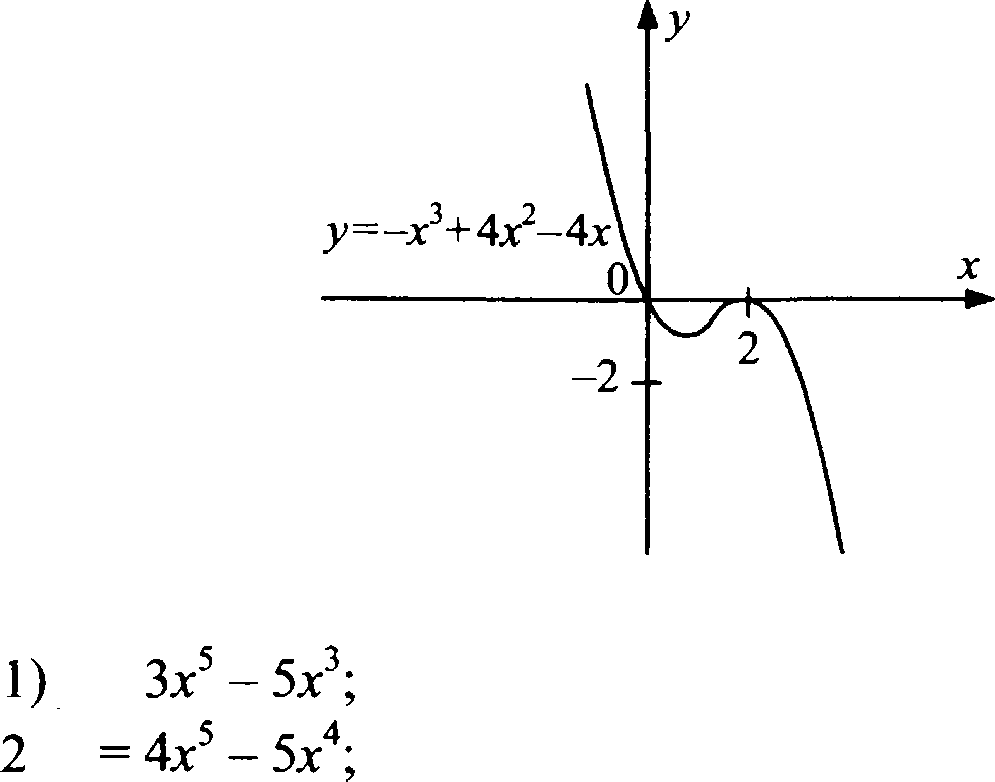
< 0; Зт' — 8т + 4 > 0,

 2,

2 x»2;

5. т = — точка min *f *

3 27 9 3 27

х = 2 — точка max7l2) = —8 + 16 — 8 — 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2  3 | 2  3 | —2 < х < 2  3 | 2 | x»2 |
|  | — | 0 |  | 0 |  |
|  |  | 32  27 |  | 0 |  |

Пример 2. Построить график функции:

 *х’ —*5 х' + 2x 10 6

**Решение:**

1) ——3 — 5тз

1. Обпасzь опредепеніія — ; 2. *у’ ——* 1534 — 15a';

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| т | т<—І | —I | —I <т<0 | 0 | 0M<l | I | т>l |
| *f(x)* | *+* | 0 | — | 0 | — | 0 | + |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |



2

—2 —1 1 2 4 \*

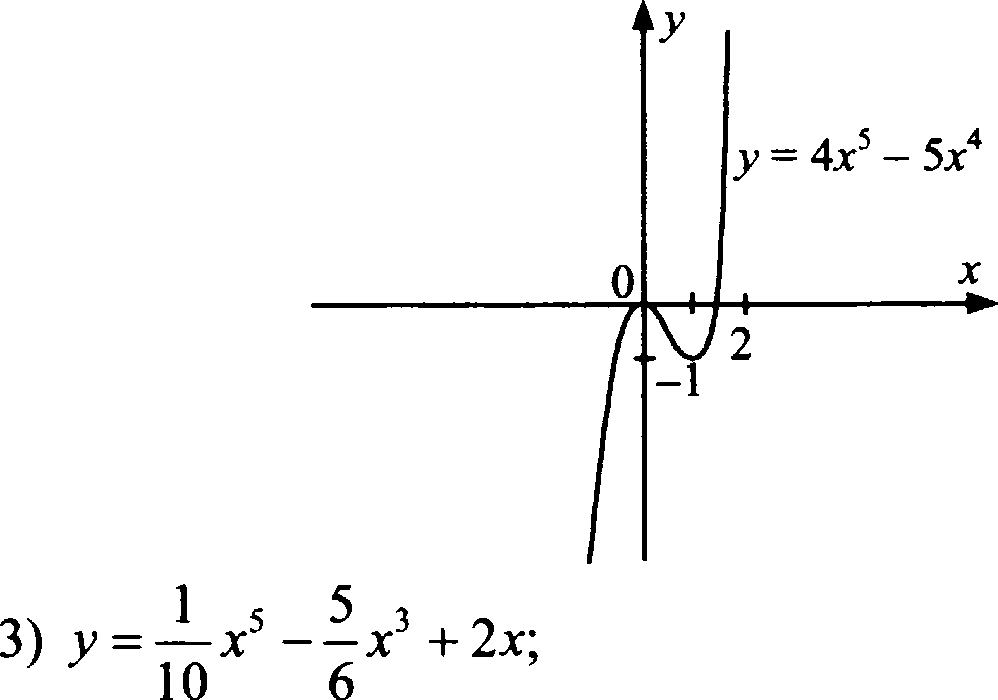
—2

2) —— 43 5 — 5 ’;

1. Область определения — IX ; 2. *у' ——* 20a’ — 20a';

*у' ——*0; 20a'(z — 1) = 0, z = 0, z = 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| т | < < 0 | 0 | 0 < < < 1 | i | х > 1 |
| *f(x)* | *+* | 0 | — | 0 | + |
| *f(x)* |  | 0 |  | —l |  |
|  |  |  |  |  |  |



1. Область определеиия — IX ;

2. *у' =*

2 2

*+* 2 *, у'* = 0;

*х* — *5s'* + 4 — 0, *D ——*25 — 16 = 9,

*—* 4 *, х* = U;

2

3 = 1, z — +l,

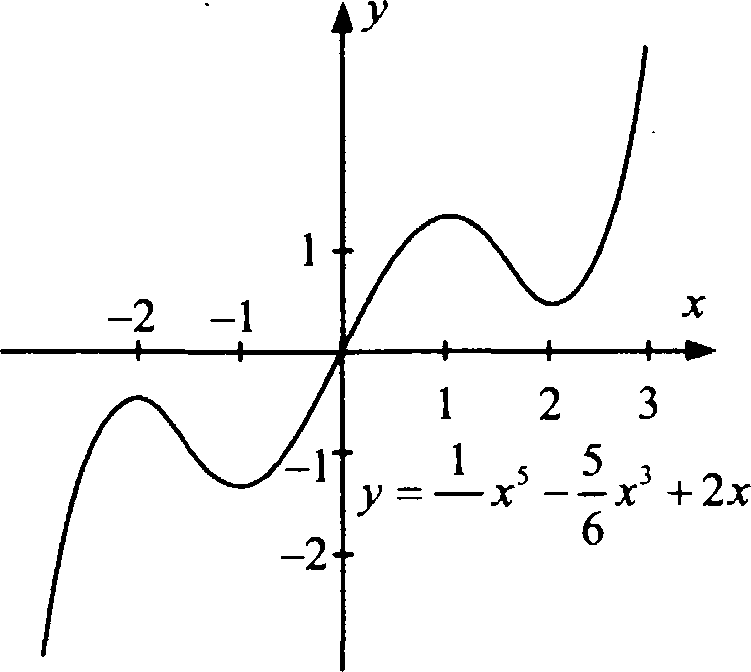
2

108

*у(-х)= —— х’ + — хЗ* — 2т = —у(т) *—* нечетная функщія,

10 6

симметричная отностельно начала координат.

Продолжим рассуждение на (0; +‹ю)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | (0; 1) | 1 | (1; 2) | 2 | (2, ) |
| *f х)* | *+* | *+* | *0* | *—* | *0* | *+* |
| *А•* | 0 |  | 19  15 |  | 8  15 |  |
|  |  |  | **max** |  | min |  |

10

* 1. **Первообразная**

О п р е д е л е н и е . Пусть на некотором промежутке вы- полняется N(x) = т), тогда функция *у —— F х)* называется *nep- вообразной ипя* ункиии *у ——А•*

Теорема 1. Пусть *F(x) —* первообразная дл• 7t› ) на неко-

тором промежутке, тогда функция *F(x) + С* тоже является пep- вообразной для *Ах)* на том же промежутке, где *С —* произ- вольная константа.

Теорема 2. Пусть -(х) — первообразная для 7t› , G(т) —

для g(т), тогда N(т) + G(т) — первообразная *iv••A• +* g(=-

Пусть -(х) — первообразная для 7t› ), *k —* константа, тогда

*kF(x) —* первообразная для @т).

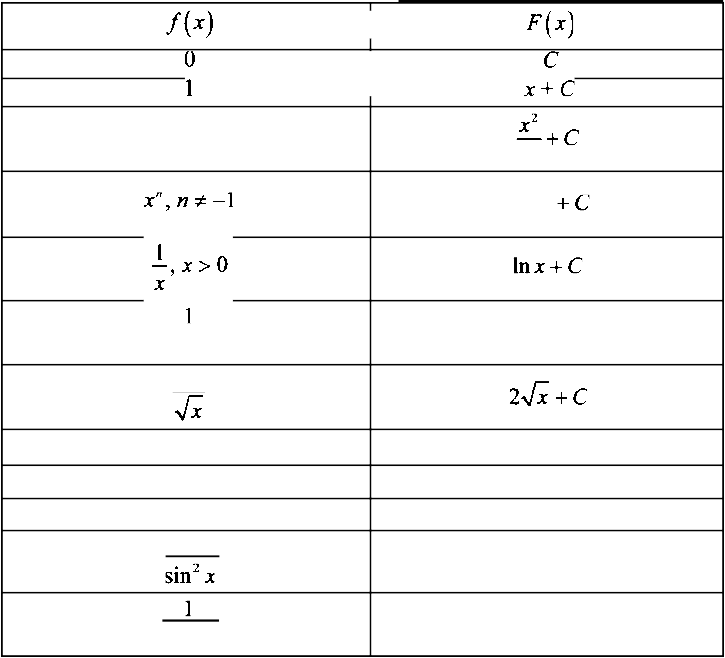
Пусть (т) — первообразная *a ••S x), k, b —* константы, *k* 0,

тогда 

*k*

*(kx + b)* — первообразная *axS\*•+ b).*

**Первообрязные элементарных функций**

2

п + l

l

*е'* sin z cOSz

l

COS' Z

*—I + с*

*е‘ + С*

—cosl + *С*

siпz + *С*

---ctgz + *С*

tgz + *С*

**Пример 1.** Найти все первообразные функции: 1) sin (2x + 3); 2) cos (3s + 4);

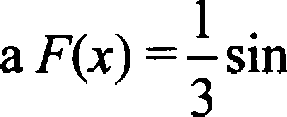
3) cos — 1 ; 4) sin — + 5 ;

4

5) е 2 ;  8)

Решение: Пользуясь таблицей первообразных элементар- ных функций и свойствами первообразных, получим:

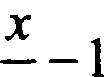
1)@z) ——sin (2x + 3), тогда

2)A=) *——*cos (3s + 4), тогд

(3 + 4) + *С ,*

3)7tx) ——cos

4)7tx) ——sin

 , тогда N(x) ——2sin 2

*х* + 5 , тогда

—

5

*х*

— —1 

2

 5 + *С,*

4



5 *А х)* ——*е* 2 *,* тогда N(x) —— 2 *е + С,*

*6)1ix) —— е‘з*

7)A ) —— 1

—,

2

’, тогда

тогда

) = *е‘З*

I 2

+ *С;*

*8)1ix) ——* i , тогда *F(x) - А* (Зх *—* l) *+ С.*

3 —1

О т в е т: 1) — cos(2s + 3) *+ С ;* 2) 1

2 

(3 + 4) + *С ;*

1. 2sin

*х* —1 + С;

2

4) —-4 cos — + 5 

4



5) 2 *е + С;* 6)

7) 2 ln 2x + С; 8)

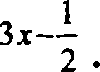
(3 *х —* 1) + *С.*

**Првмер 2.** Найти одиу из первообразных функции:

* 1. *е’ —* cos 3s;

3) 2sin — 5e

2) *e4* + sin 2x;

, 4) 3cos — + 2e

5) *х* + 4sin(4s + 2) ; 6) 4 3

5 333+1 2 — 5

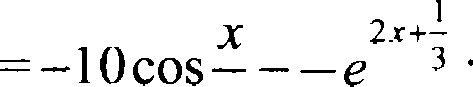
Решение: Qанный пример решается аналогично предыду- цему с тем лишь отличием, что константу С можно опустить.

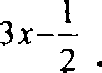
1. Ax) *—— е’ —* cos 3s, тогда *F(x) ——'*2 *е" —* 3 sin
2. Ax) ——*е’* + sin 2x, тогда *F(x) -—* 4e" — **—COS**

11 l

З)фz) = 2sin

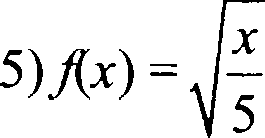
— 5e , тогда N(z) 5

5 5 2

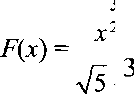
з —— 

2

 = 3cos— + 2e , тогда N(z) = 2lsin —

7

— + 4sin(4s + 2) , тогда

5

 4 cos(4s + 2) =

—

4

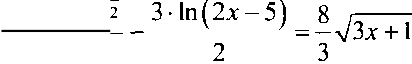
7 +—е

— cos(4s + 2) ;

2

 4 3 , тогда

333+1 2 — 5

*F х)* 4 (3 + 1)

i .3

2

21п(2s — 5) .

О т в е т: 1)

 3s; 2) 4 *e4* —

2 3

I

— cOS 

2

*х* 5  *х* 2 

 —10cOS *е* , 4) 21sin +

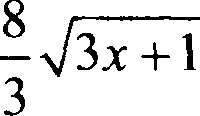
— *—* — —е

5 2

2 5 — cos(4z + 2);

3

7 3

6) з ln(2s — 5).

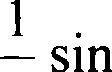
2

Пример 3. Найти одну из первообразных функции:

1. sinxcoн;

2) sinxcos3z — coнsin3z.

**Решение:**

l)фz) —— 

2

2x, тогда *F х) ——* —— COS

4

1

2)фz) *——* sin (.г —3s) = —sin 2s, тогда *F(x) ——* — cOS

2

О т в е т: 1) — — COS 2s; 2) 2cos2z.

4

Пусть нам необходимо найти площадь фигуры, ограни- ченной графиком у — Дх) и прямыми у = 0, х = п, т = *Ь. я* простоты предполагает, чтоДх) > 0 на [п; *b).*

Разобьем отрезок [п; *bl* на п равных частей точками

п = т < т < . *.< х = b .* На каждом из отрезков *xk-! . k ) • -*

строим прямоугольник высоты *f( xk ) .* Сумма площадей всех

прямоугольников:

*Z(а,b) —— *

*у —— fix)*

*х*

*а ——xg х, х ху › b ——х*

При неограниченном увеличении п существует предел

*S = limq (а,b) ,* который является искомой площадью. Этот

предел называется определенным интегралом Дх) от *а go b* и 6

обозначается $J(т)W .

Теорема 1. Если функция у = Дх) непрерывна на *(а; bl.* то

fi

справедлива формула: $J(т)dr= *F(b) — F(a),* где *F{x) —* пер-

вообразная дляДх). Это формула Ньютона—Лейбница.

**Пример 4.** Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Oн и параболой:

1) = 4 — т ,

2) у = l — x2;

3) = — 2 + 4x — 3.

Решение: 1) = 4 — x2;

*ввс —* искомая площадь кри- волинейной трапеции;

4 *В*



2

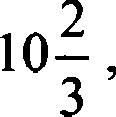
—2 2 4

S 0 О С i

l) 4 — т2 = 0, т = + 2, п — —2,

*b* = 2;

2) *Sввс -* 4 3 2 ) — 4Щ

= 16 — 16 = 32 =

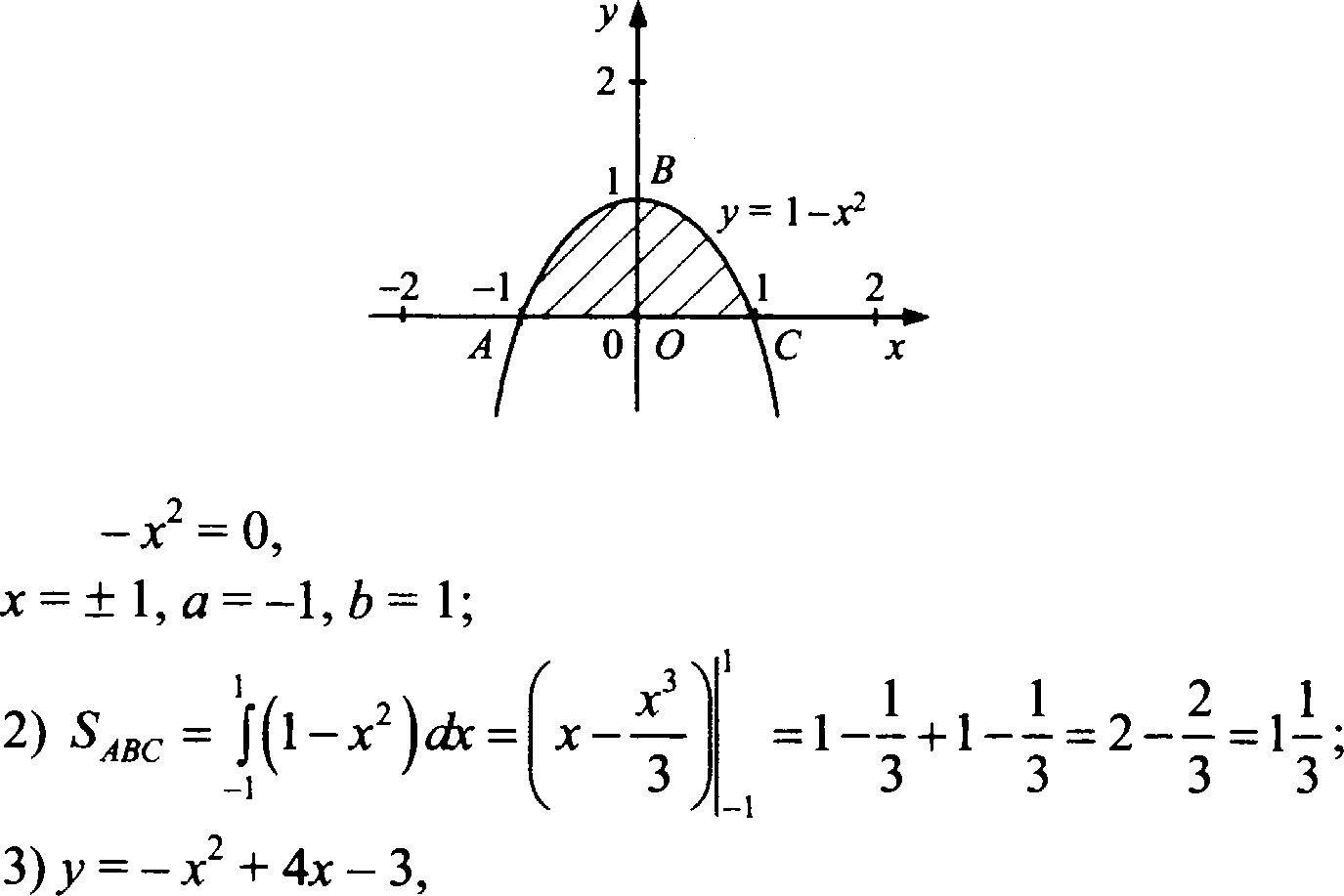
—

3 3

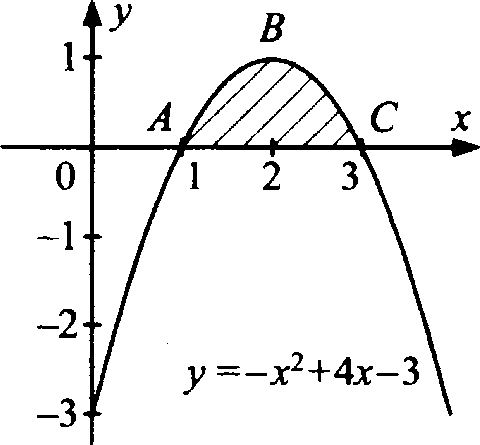
2) *у* —— I — *x2‘*

= 8 8 + 8 — 8 \_

3 3

*SВ вс —* искомая площадь криволинейной трапеиии;

i) 1



*SВ вс —* искомая площадь криволинейной трапеіщи;

i) — z 2 + 4z — 3 — 0,

т2 — 4т + 3 = 0;

*D/4* = 4 — 3 = 1;

ті = 3, z2 = 1, п = 1, *b ——* 3;

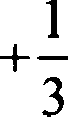


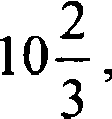
2) *x2* +4›— з)di= т' + 43 — Зт = —9 + 18 —9 +

2

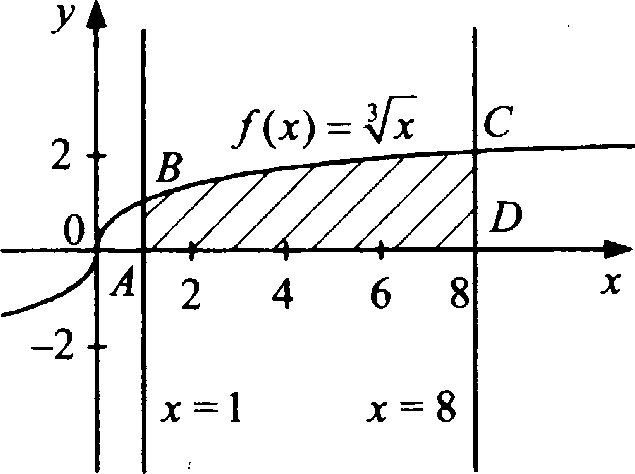
——

*ввс — !р* 3 2

— 2 + 3 = 1 .

з

О т в е т: 1) 2) 

**Пример 5.** Найдііте площадь фигуры, ограниченной прямыми т = *а, х —— b,* осью *Ох* и графиком функции у *-px).*

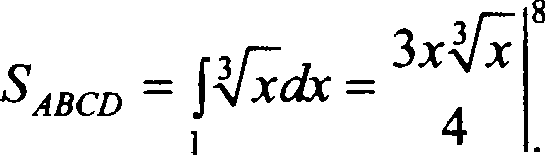
I) *а ——* 1, *b ——* 8, *px) —— ;*

2) *а* ——4, *b ——* 9, *px) —— ix .*

**Решение:**

1)фт) —— , *а ——* 1, *b ——* 8,

*йABcD* искомая площадь криволинейной трапещіи,

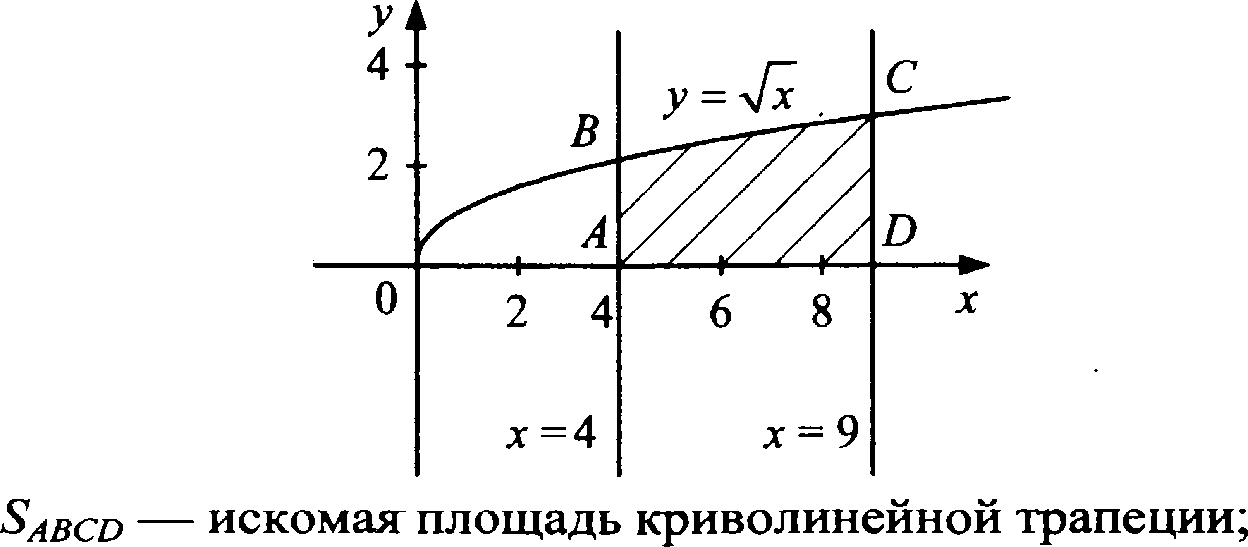
8 3

4

(16 — 1) = 45 = 1

4

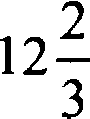
—

2)фт) —— т *а ——* 4, *b ——* 9,

*’ABCD*

9

*xdx*

(27 — 8) = 38 

з 4

О т в е т: 1) 11 4

; 2) 122 .

з

* 1. **ЧИСЛА** И ВЫЧНСЛЕННЯ
     1. Проиенты

О п р е д е л е н и е . *Процентом числа а* называется сотая его часть.

Простой процентный рост: fi, = 1 +

100

S , где *S* — началь-

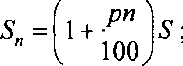
ная сумма вклада, *р* % — месячньйі процент, п — иисло месяцев.

**ЛОЯП-ІЫЁі H]3OlJeHTHЬIИ }3OGT:** *р —* +

100

**Пример 1.** Сумма в 1 тыс. py6. уменьшается ежемесячно на 5% от первоначальной суммы. Через сколько месяцев эта сумма сократится до: 1) 750 py6.; 2) 500 py6.; 3) 250 py6.; 4) 50 py6.?

Решение: Данный пример на простой процентный рост.

 ’“ + 100 ' ’“ 100 '

п =" ) 100 алее по условию: *р’Тв ——* 5 % от 1000 py6.

составляют

1000 5 = 50 р. На эту величину сумма в 1000 р.

100

ежемесячно уменьшается, следовательно в формуле ее надо взять со знаком «—». Имеем

(750 —1000) 100 (1000 — 750)

—50 -1000 5 1000

2) ' 1000 — 500) 100 = 10 (мес.);

5 1000

(1000 — 250) 100 15 (мес.);

5 1000

4) (1000 — 50) -100 = 19 (мес.).

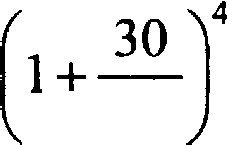
5 1000

5 (мес.);

О т в е т: через 5 мес.; через 10 мес.; через 15 мес.; через 19 мес.

**Прнмер 2.** Какая сумма будет на счете через 4 года, если на него положены 2000 py6. под 30 % годовых и ежегодно вы- платы процентов добавляіотся к вкладу?

Решение: Данный пример — на сложный процентный рост.

2000 = 5712,2 (py6.).

100

О т в е т: 5712,2 (py6.).

* 1. Нропорцян

О п р ед е л е н и е . *Іlропорцией* называется верное равен- ство двух отношений. Нропорции записывают следуюіцим

o6pазом:

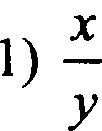
*b- d-*

**()GHOBHOB GBOЙGTBO fI]3OHOj3E(HH: j3I1BeHCTBO**

*b d*

ется пропоріріей тогда и только тогда, когда *ad ——be.*

**Прнмер 1.** Найдите такие значения х и *у,•гvобы* каждое из двух равенств было верньш:

3 *у* 4

8 25 5

2) х : *—— у :* Зз и *у :* 1,5 = 0,2 : 0,75.

Решение:

1) 

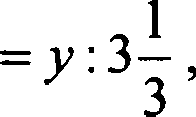
*у 8* 25 5

5 = 6,4- 25;

——6,4 -5 = 32;

*х* 3

32 8

, 2) т :i23 

*у :* 1,5 = 0,2 : 0,75;

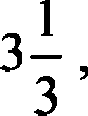
0,753 = 1,5 0,2;

*у ——* 0,4;

8x = -3

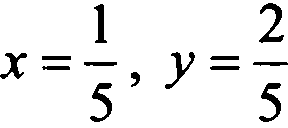
х = 12.

32;

,:i2 = 0, 4 : 

2 10 2 1

3 3 5 3 3 5

О т в е т: т = 12, у ——32. О т в е т :

О п р е д е л е н и е . е величины называются *пропорцио-* ь‹zsььt›ьяп, если при изменении одной из них в несколько раз другая изменяется в такое же количество раз.

О п р е д е л е н и е . е величины называются *обратно пропорциональными,* если при увеличении одной из них в не- сколько раз другая уменьшается в такое же количество раз.

Пример 2. Какие из приведенных нівке формул являются

прямой пропорциональностью, обратной пропорщіонально-

**GThIO І4ЈІИ HE IIBJIfiЮTGII НИ TCM, НИ Д]ЗЩИМ'**

1) *Р —— 5,2b;* 2) *а ——* 8q + 1; 3) А —— ’, 4) с = 4 : *d;*

5) *а* = 8 6) S = vï; 7) N= 10 : S; 8) *ab* = 18;

9) G = l 10) S = a 2.

4k

**Решение:** Прямая пропорідіональность: 1, 3, 6.

Обратная пропорциональность: 4, 5, 7, 8, 9. Не являются ни тем, ни другим: 2, 10.

* 1. **Решение текстовых** задач

Задачн на двнженне

Пример 1. Из пункта *А* в пункт *В,* расположеннъій в 24 км от *А,* одновременно отправились велосипедист и пешеход. Ве- лосипедист прибыл в пункт *В* на 4 ч раньше пешехода. Из- вестно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на 4 км/ч скоростью, то на пугь из *А* в *В* он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

**Решенне:**

Ско ость велосипедиста *х*

Скорость пешехода

т; > 0;

24 24

*У\** '

4

’ 243 — 243 = 4 , бт — 6 = ,

24 \_ 1 24 2y = т — 4; *х —-* 2y + 4;

х — 4 2 *у*

6(2 + 4) — 6 = (2 + 4)3;

12a + 24 — *бу ——* 232 + 4y, 232 — 2y — 24 = 0, y2 —у — 12 = 0;

1 + 1 + 48 1 + 7

*”* 2 2 '

\_ l — 7

2

= —3 — не удовлетворяет условию; *у ——*4, т = 12.

О т в е т : 4 км/ч.

**Прнмер 2.** От пристани *А* отправились одновременно вниз по течению рекн катер и плот. Катер спустился вниз по тече- нию на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в *А* через 14 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость тече- ния реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от *А.*

**Решение:**

Заметим, что из условия задачи следует, что т z у .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cnopocvь (iti /•і) |
| Скорость реки | *х, х >* 0 |
| Собственная скорость катера | *Р.У* |
| Скорость по течению | *у + х* |
| Скорость протнв течення | *у - х* |

 96 + 96 = 14, 96 + 96 = 14,

24 \_ 96 96 —24 24 24 96 96

24( — ) + 243 = 14;

*х(у - х)*

24у = 14a(y — х),

192a = 14(y — *х) у + х);*

24a = 14a(у — *х),*

96( — т) + 96( + т) = 14( ' — т');

(i)

(2)

Разделим (2) на (1):

+ *х* — 8,

*х*

+ т = 8т; = 7т, 243 = 143(y — т); 24 7т = 143(7т — т); 24 7т = 2 - 7 - 632 , 12х = 632, z 0 ;

т = 2, = 14.

О т в е т : 14 км/ч; 2 км/ч.

Пример 3. Из пунктов *А* и *В* навстречу друг другу одно- временно выезжают велосипедист и автобус. Время, затрачи- ваемое велосипедистом на проезд из *А* в *В,* на 2 ч 40 мин больше времени, которое тратит автобус на проезд из *В* в *А,* а

сумма этих времен в 5 — раза больше времени, прошедшего от

начала движения велосипедиста и автобуса до момента их встречи. Какое время велосипедист затрачивает на проезд из *А* в *В,* а автобус — на проезд из *В* в Л?

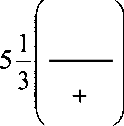
Решение:



пщь — i;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Cuopoczь | Bpeuя |
| Велосигіедіісz |  | *а (ч)* |
| Автобус |  | *ь (о›* |

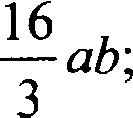
*а — b ——*2 40

60

*а + b ——*

*а b*

*а ——b* 8

+ 3

*(а + b)! ——*

8 ' 16 8

*2b*

-

*ь* +

+—

4Ь2 + 2 *ь +* 64 16 *ь z+* 128b

3 9 3 9

36b2 + 96b + 64 — 48b2 — 128b ——0;

—12b2 — 32b + 64 = 0; 332 + 8b — 16 = 0;

*ь* —4 + 1634+8 \_ --4 + 8

*b*i = —-4 — не удовлетворяет условию; *b ——* 4

*а* = 4.

О т в е т : 4

—

'з И 4 ч.

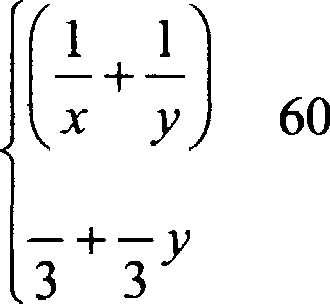
3ядячи на работу

**Прнмер 1.** Двум землекопам бьшо поручено вырыть канаву за 3 ч 36 мин. Однако первый приступил к работе тогда, когда второй уже вырьш треть канавы и перестал копать. В результате канава бьша вырьгга за 8 ч. За сколько часов каж- дый землекоп может вьгрьпъ канаву один?

**Решение:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | \_ **]ЭОНЗВОДНТ0ЛЬНОСТЬ** за 1 ч |
| i зeunexon |  | 1 |
| II зeisieuon |  | 1 |

Вся канава — i ;

36

36(x + у) = l0щ,

2 = 8;

т = 24 — 2 ;

36(24 — ) = 103(24 — 2 ); 9(24 — ) = 5312 — );

216 — 9 = 603 — 532; 5 2 693 + 216 = 0;

69 + 4761 — 4320 69 + 21



10 10

Ј}' 9, <і' 6; z' 4,8 Н. <z — 14,4 Н.

О т в е т : 9 ч, 6 ч или 4 u 48 мин, 14 ч 24 мин.

**Пример 2.** 60 деталей первый рабочий изготавливает на 3 ч быстрее, чем второй. За сколько часов второй рабочий из- готовит 90 деталей, если работая вместе, они изготавливают за 1 ч 30 деталей.

Решение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | За 1 ч |
| i рабочий | т деталей |
| II рабочий | *у* лжжеи |

60 + 3 = 60 , 60(x — у) ——Зщ, 20(x — у) —— щ,

*х + у ——*30; = 30 — у; х ——30 — у;

20(30 — 2y) = 330 *—у),* 600 — 40a = 30a —y 2 ,

y 2 — 70 + 600 = 0, '

1,2

35 + 1225 — 600 = 35+ 25;

*ii ——* 60 — не удовлетворяет условию, *у ——* 10,

90 = 9 ч.

10

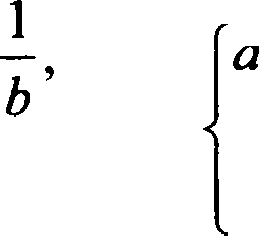
О т в е т : 9 ч.

Прнмер 3. В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняетСЯ. При заполненном на 1/3 бассейне 6ьши открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым через 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

Решение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Зя 1 ч |
| I труба | наполняет а—ю яacть |
| II зруба | *опоромияех b-ю* часть |

1 — весь бассейн;

—2—

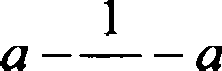
*— b ——* —2аЬ,

+ 8a —8b =

0; *b*

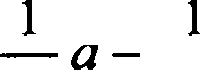
l + а;

24

i

24 = —2a 24

+ а ; 2a' +



12 24

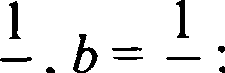
= 0;

48a2 + 2a — l = 0;

—1 + 1 + 48 —l + 7

48 48

*а -—*

l — не удовлетворяет условию; п = 

8 6

6

1. труба наполнит басейн за 8 ч;
2. труба опорожнит бассейн за 6 ч. О т в е т : 8 ч и 6 ч.

Задачи на десятичную Qopмy записи числа

**Пример 1.** Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 280.

**Решение:**

*ab —* двузначное число, *ab ——* 10a + *b, а* е (l; 2; ...; 9};

*b е* {0; l; 2; ...; 9}

*b — а ——* 2, *b —-* 2 *+ а,*

(10a + *b) а + b) --* 280; (10a + 2 + *а) а +* 2 + *а) ——*280; (11a *+* 2)(2a + 2) = 280; 22a' + 26a + 4 — 280 = 0;

22n2 + 26a — 276 = 0; 1la 2 + 13a — 138 = 0;

—13 + 169 + 44 138 —13 + 79

22 22

*а — —* 92 —неудовлегоряеіусловию,п— 66

= 3, *b -—* 5.

22 22

О т в е т: *ab ——* 35.

**Прнмер 2.** Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в 2,25 раза больше самого числа. Найдите это число.

**Решение:**

*ab* = 10a + *b, а* е {l; 2; ...; 9}; *b* е {0; l; 2; ...; 9}; 10a + *b ——*4(a + *b),* ба = ЗЬ,

*(а + b) 2 -—* 2, 25(10a + *b), а + b)2 ——* 2, 25(10a + 6);

6 = 2s,

*(а* + 2n) 2 = 2, 25 -12a;

9a' — 27a, а г 0, 9п - 27, а = 3, *b ——* 6, *ab ——* 36.

О т в е т: *ab ——* 36.

Пример 3. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 3. Найдите это число, если разность квадратов его цнфр по модулю в 2 раза больше квадрата разности его цнфр.

Решение:

*ab ——* 10a + *b, а в* (1; 2; ...; 9) , *b в (0,*1; 2; ...; 9);

*I* 0а *+ b ——* За + ЗЬ + 3,

*a 2 - b2 -—* 2(a — *b) 2* ,

*--* 7а 3

2

*a z — bz ——* 2(a *— b*

*a2 \_* 7a — 3 ' = 2 *а -* 7a — 3

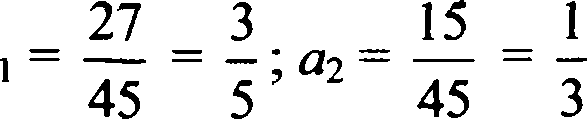
2 2

4а2 — 49a2 + 42a — 9J = 2(2a — 7a + 3)2;

—-4532 + 42a — 9J = 2(3 — 5a)2 = 18 — 60a + 50a2;

4532 — 42a + 9 = 0. Исследуем на знак:

*ai ,2* —

*а*

21 + 441 — 405 \_ 21 + 6

45 45



1 3

3 5

*а в* (1; 2; ...; 9} , --45a *+* 42a — 9 < 0;

—-45a + 42a — 9J = 45a2 — 42a + 9; 45a — 42a + 9 = 18 — 60a + 50a ;

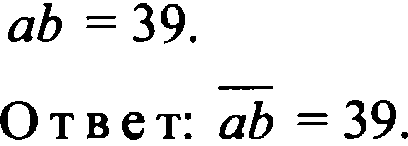
5а2 — 18a + 9 = 0; 1,2'

9 + 81 — 45 9 + 6

5 5

е удовлетворяет условию, *а ——*3, *b ——* 7 3 — 3 =9;

2



ЗадПчи ня КоПцентряцню, cмecu н сплавы

Прнмер 1. Из 40 т железной рудм выплавляют 20 т стали, содержаіцей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

Решенне:

1. 2 = 1,2 т — примеси в стали;
2. 40 — 20 = 20 т — отделенные принеси в процессе вы-

плавки стали;

20 + 1,2 = 21,2 т — принеси в руде;

21, 2 100% \_ 212

40 4

О т в е т: 53%.

* 53% — принеси в руде.

**Пример 2.** Плотность первого металла на 4 г/см' больше плотности второго металла. Из 6 кг первого металла и 4 кг второго изготовили сплав, деталь из которого ішеет массу 0,5 кг. Если бы такая же по объему деталь была изготовлена только из второго металла, то ее масса была бы на 20% мень- ше. Найдите плотность второго метюзла.

**Решение:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | Macca | Объеи |
| l металл | (х + 4) г/см’ | 6 кг | 60  ( + 4) |
|  |  | 4 кг | 4000 |
| Новый сплав |  | 10 кг |  |

Плотность нового сплава:

10000 \_ 10000 \_ 10000 ( + 4) - \_

6000+ 4000 10000a + 16000 1000(I 0s + 16)

*х* + 4 *х х(т* + 4)

\_ 10(т + 4) т

103 + 16

Объем изготовленной детали (v = m/p ):

500 : 10(т + 4) - т \_ 500(10a + 16) 50(10x + 16

103 + 16 10(т + 4) т т(т + 4)

Далее: 50(10a + 16)

- т = 500 0,8 ;

т(т + 4)

103 + 16 = 8

x+4

10a + 16 = 8z +32; 2x = 16; т = 8 г/смЗ.

О т в е т: 8 г/см З

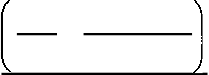
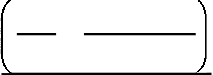
Пример 3. Из двух растворов с различным процентным содержанием спирта массой *т г* и в г отлили по одинаковому количеству раствора. Каждый из отлитых растворов долили в остаток от другого раствора, после чего процентное содержа- ние спирта в обоих полученных растворах стало одинаковые. Сколько раствора бьшо отлито из каждого сосуда?

Решение:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Масса | Cnupт °Z« | Отлвлн | Осталось |
| I *расівор* | m (г) | т % | *р* (г) | *т —р* |
| II раствор | п (г) | *у '•* | *Р \*)* | *п —р* |

*р —* отлили.

После переливания массы растворов не изменились, и процентное содержаівіе спнрта в обоих растворах, а значит и доли спирта в них, стали одинаковы, т.е. количество спирта:

*px+ (п — р)- у ру+ (т — р)- х*

100 100 100 100

*п т*

*тех + ny — ру) —— фу + mx —px)п; mpx + mny — mpy —— npy + nmx — npx; (т + п)рх + тпЦ — х) — (т + п)ру ——* 0;

*(т + п) - р(х — у) — mn х — у) ——* 0; *х — у) т + п)р — mn) ——*0;

*х z у, р(т + п) —— mn, р ——*

*mn т + п*

О т в е т:

*mn*

m + п

## s. гЕОМЕТРНЧЕСхиЕ ‹і•игvяы

И ПX СВОЙСТВА.

**ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРНЧЕСКИХ ВЕЛНЧНН**

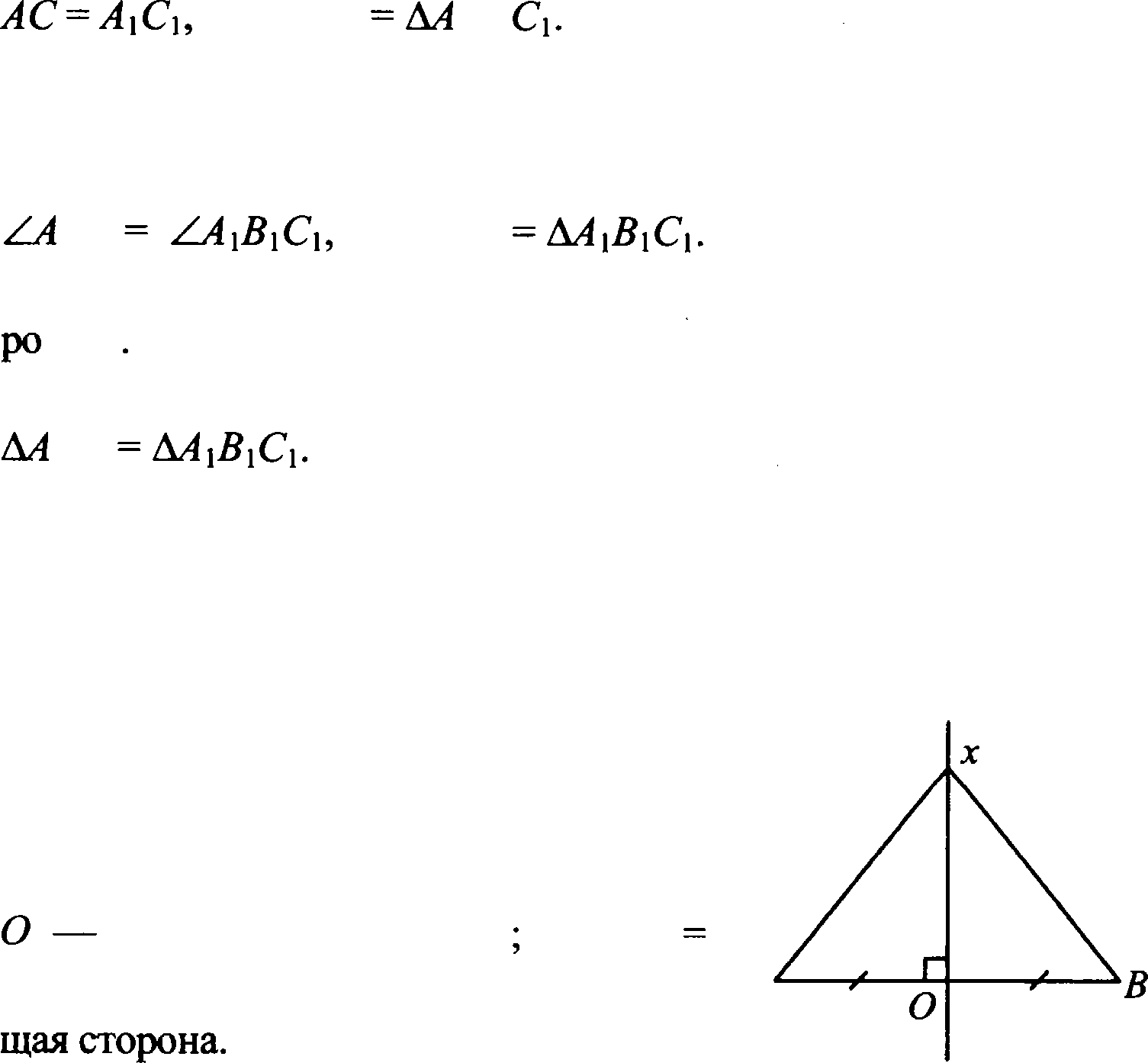
* 1. Треугольник

**Признаки равенства треугольников**

О п р е де л е н и е . ,ІЈва треугольника назьпаются ряввыми, если m можно наложить друг на друга так, чтобы оіві совпали.

* 1. (Первый признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

Если в *ЬABC* и *bAТВ Сi ВAC —— ТBНAiС , AB —- АТВ ,*

то *ЬABC В*

1. (Второй признак равенства треугольников — по стороне

и прилежащим к ней углам).

Если в *ЬABC* и *bA В С BC —— В С , СВ —— СТВ , BC ЬABC*

1. (Третий признак равенства треугольников — по трем сто- нам)

Если в *ЬABC* и AT *ТВ С AB —— АТВ , AC—— А С , BC -— В С ,* то

*BC*

**Пример 1.** Через середину О отрезка *AB* проведена пря- мая, перпендикулярная прямой *AB.* ,f{окажите, что каждая точ- ка Јэтой прямой одинаково удалена от точек *А* и *В.*

**Решение:**

Возьмем на прямой произвольиую

зх›ихуЈи соединим ее с точками Л и *В.*

Рассмотрим полученные треуголь-

*инкн.* В *bAOX - ЬBOX — AO = OB,* т.к.

середнна отрезка YOU

= YOU= 90°, т.к. *AB L ХО; ОХ — оБ- А*

Таким образом, &I9J= ABOJ по l-мy признаку равенства треугольников. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Отсюда — M— *BX.*

Что и требовалось доказать. Пример 2. Отрезки *AB* и

*CD* пересекаются в точке fi. Докажите равенство тре- угольников *ACO* и *DBO,* если известно, что угол *ACO* равен углу *DBO* и *ВО —— СО.*

**Решенне:** Т.к. *СО —— ВО, А D*

*СО —— XDBO,* а *OC*

*—— XDOB* (как вертикальные углы), то *ЬACO —— bDBO по* 2-му признаку равенства треугольников.

Прнмер 3. Треугольники *ABC* и *ABC* равнобедренные с общим осно- ванием *AB.* Докажите равенство тре- угольников *ACC* и *BCC .*

Решенне: В *W CCi* и *ЬBCC :*

*AC —— СВ, AC —— С В* (т.к. *ЬACB* и *А*

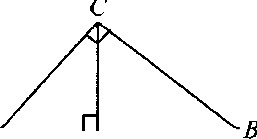
*ЬABCi —* равнобедренные),

*СС —* общая.

Таким образом, *ЬACC —— ЬBCC по* 3-му признаку равенства треугольни- ков.

**Прнзнаки подобня треугольннков**

1. (Первый признак подобия треугольников — по двум уг- лам). Два треугольника являются подобными, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.
2. (Второй признак подобия треугольников — по двум сто- ронам и углу между ними). Два треугольника являются подоб- ными, если две стороны одного треугольника пропоріиіональ- ны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами равны.
3. (Третий признак подобия треугольников по трем сторонам). Qвa треугольника являіотся подобными, если все стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Пример 4. покажите, что вы-

сота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два тре-

угольника, подобные исходному. *А*

Решение: Пусть *bABC —* пря- *D*

моугольный, *CC* ——90°, *CD —* высота.

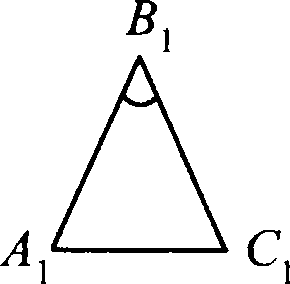
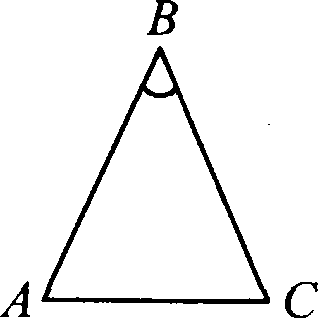
Рассмотрим *bABC* и *MCD:*

l) *WCB* —— *ZCDA ——* 90°.

2) *ZCAB —— ZDAC* (общий угол). Значит, *kABC bACD по* двум углам).

Аналогично доказывается, что *bABC kCBD.*

Пример 5. Углы *В* и *В* треугольников *ABC* и *А В С* рав- ны. Стороны треугольника *ABC,* прилежащие к углу *В,* в 2,5 раза больше сторон треугольника *А В С ,* прилежащих к углу *В .* Найдите *AC* и Л iCi. если их сумма равна 4,2 м.



**Решение:**

*AB* = *BC* — 2,5 и *ZB —— ZB ,* так что

*А, В BiC*

*ЬABC* W *В* (по в+opouy ripuaнauy подобгія зјэеугольніі- ков) с коэффициентом подобия, равным 2,5. Пусть *А С —— х* м, следовательно, *AC ——* 2,5a м, но *А С + AC ——* 4,2 м,

Так что х + 2,5a — 4,2; 3,5a = 4,2, т = 1,2 м. Тогда *А С —*

— 1,2 м, следовательно *AC ——* 4,2 — Л,*Ci* ——4,2 — 1,2 = 3 м.

О т в е т: Л *Ci* - 1,2 м, *AC ——* 3 м.

**Прнмер 6.** Подобньт ли треугольники *ABC* и *А В Су,* если:

l) *ЛB* —— 1 м, *ЛС* —— 1,5 м, *BC ——* 2 м; *А B ——* 10 см,

*А C ——* 15 см, *В* Су —— 20 см;

2) *ЛB* —— i м, ЛС ——2 м, *BC ——* 1,5 м; Л *В* —— 8 дм,

*А C ——* 16 дм, *ВАС,* ——12 дм;

3) ЖІ = l м, *AC ——*2 м, *BC ——* 1,25 м; *А В —-* 10 см,

*А Су ——*20 см, *В,C,* =30 см.

Решение: Треугольника будут подобны, если будет вы-

полняться равенство:

*AB AC BC*

*A,Bi* ЛіСі *BiCi*

100 150 \_ 200 = 10 — треугольника подобны;

10 15 20

10 20 15 5

2)

—8 = l6 = 1—2=—4

100 200 \_ 125

10 20 30

* ъ еугольники подобны;
* неверно, поэтому треуголъники не

Сумма внутренних углов треугольника равна 180 граду-

Неравенство треугольника: во всяком треугольнике ка- ждая его сторона меньше суммы двух других его сторон.

Нример 7. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая — 0,7 м. Найдите третью сторону, зная, что ее длина равна целому числу метров.

Решение: В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, но больше их разности. Пусть т — третья сторона треугольника, п = 1,9 м, *b ——* 0,7 м — две другие сторо- не. Тогда п — *b < х < а + b,* так что 1,9 — 0,7 < *х <* 1,9 + 0,7;

1,2 < т < 2,6.

Так как х — целое число, то х - 2.

О т в е т: 2 м.

Теорема Нн§іягора: В прямоугольном треугольнике квад- рат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

**Пример** 8. У прямоугольного треугольника заданы катеты

п и *Ь.* Найдите гипотенузу, если:

1) *а ——* 3, *b ——* 4; 2) п = 1, *b ——* l ; 3) *а ——* 5, *b ——* 6.

Решение: Если с — гипотенуза, *а* и *b —* катеты, то по тео- реме Пифагора,

c2 — *a 2+ b2 ;* с = *a2 + b2* . Далее

l) с = 3+32 4 2 == 93+ 16 = — 5;

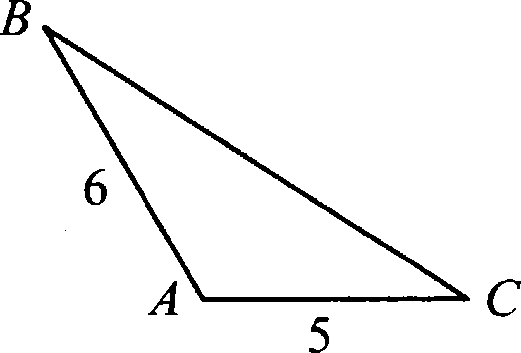
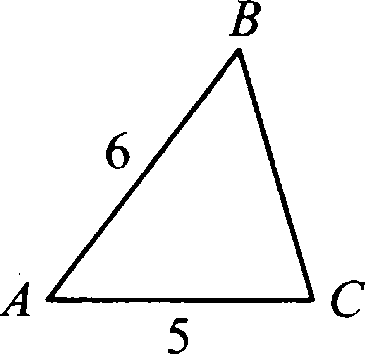
2) с = 3 12 + 12 — 2 -1,4;

 = 3 52 + 62 == 2533+6 = - 7,8.

О т в е т: l) 5; 2) 2 - 1,4; 3) 6 - 7,8.

Теорема **косинусов:** Квадрат любой стороны треугольни- ка равен разности между суммой квадратов двух других сто- рон и удвоенньш произведением этих сторон на косинус угла между ними.

Пример 9. У треугольника две стороны равны 5 м и 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.



**Решение:** Пусть *AB ——*6 м, *AC —— 5* м; sinM = 0,6. Имеем:



= + 1 — sin 2 *А* =*——* +—l 30,36 = +03,64 —

Qaлee, по теореме косинусов

*BY —— АВ2 + AT — ШВ ЛС-соsМ* получаем, что

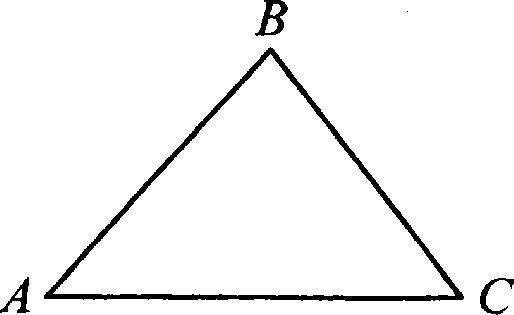
l) *BY ——* 36 + 25 — 2-5-6 0,8 = 61 — 48 = 13 м2 и *BC ——* I м;

2) *BY ——* 36 + 25 — 2 5 6(Ю,8) — 61 + 48 = 109 м2 и

*BC —— 1* м.

О т в е т: i) I м; 2) I м.

Теорема синусов: Отношения сторон треугольника к си- нусам противолежащих углов равны между собой.

Нрнмер 10. У треугольника *ABC AB ——* 15 см, *AC ——* 10 см. Может ли

sin *ТВ* ———?

4

**Решенне:** По теореме синусов:

 *AB AC*

откуда имеем:

п *тв —— AC-* sin MC

*AB* 15

2

* - SiH 



Если sin *ZB*

= 3 то siп MC = 3 . 2 = 9 но



— — —

4 4 3 8

*а* 9—> 1, так что sin *ZB* не может быть равен 3

8 4

О т в е т : не может.

Площадь треугольника равна половине произведения одной из его сторон на проведенную к этой стороне высоту:

*S —— ah.*

2

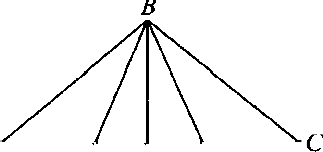
Площадь любого треугольника равна половине произведе- ния любых двух его сторон на синус угла между ними.

Формула Герона для площади треугольника:

*S —— а(р)(—pp- b) р — с) ,*

где *а, b,* с — длины сторон треугольника, а

полупериметр треугольника.

Прнмер 11. Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вер-

ШиНу.

*а + b+ с*

2

**Peuieuнe:** Рааделим *AC* на *А*

*AD —— DE —— EC.* Тогда

*’ABD = AD BH S*

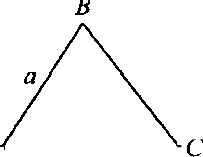
*› DBE*

2 2

Так что *SчBD —— DBE —— S EBC•*

*D Н Е*

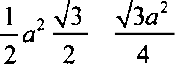
2

Пример 12. Найдите площадь равно- стороннего треугольника со стороной *а.*

Решение: Пусть *ЬABC —* равносто-р ронний, *AB —— а.*

Тогда = *ZB —— MC ——* 60°, следова- *А*

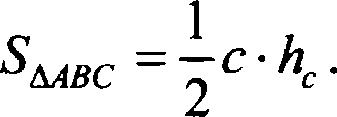
тельно

*- а* sin 60° = 

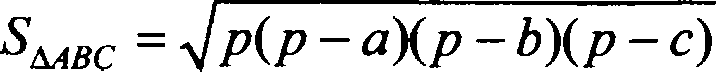
О т в е т : *33a’*

4

**Пример 13.** Стороны треугольника *а, b, с.* Найдите высоту треугольника, опущеняую на сторону с.

**Решение:** Пусть *h —* высота. Тогда

С другой стороны по Qормуле Герона

, где: *р* = *а+ b+о*

2

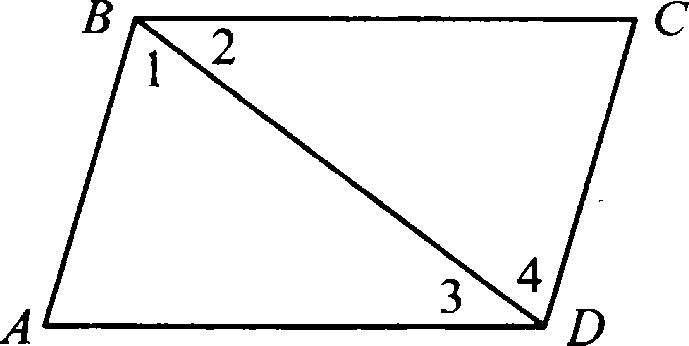
Так что *h, —— В ВС*

*а(р)(—pp— b)(р - с) .*

О т в е т : 2

*а(р)(—pp— b)(р — с) .*

* 1. Многоугольники

О п р е д е л е н и е . *Парал- лелограмм — 4-угольник, в ко- тором противоположные сто- роны попарно параллельны.*

Теорема 1 (свойство сто- рон и углов параллелограмма).



Пусть *ABCD —* параллелограмм. Тогда *AB ——CD, BC —— AD,*

*- MC, ZB ——* и + *ZB ——* 180°.

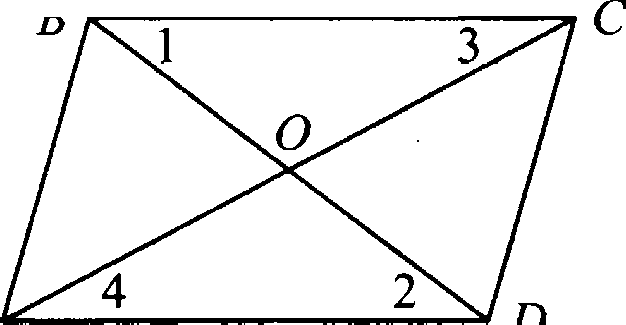
Теорема 2 (признаки параллелограмма).

Если в выпуклом 4-угольнике *ABCD:* или 1) *AB ——CD* и *BC——*

*—— AD,* или 2) *AB —— CD* и *AB CD,* то *ABCD —* параллелограмм.

Теорема 3 (свойство диагоналей).

Пусть *ABCD —* параллелограмм, *AC BD ——О.*

Тогда *AO —— OC* и *ВО —— OD. в*

Теорема 4. (признак паралле-

лограмма). *О*

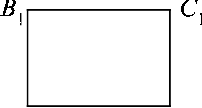
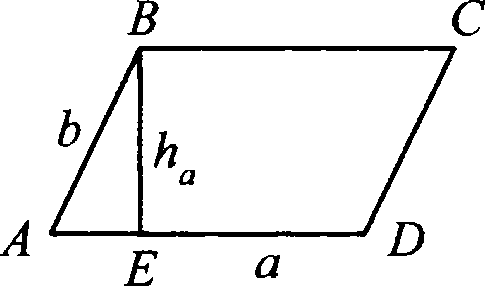
Пусть *ABCD —* 4-угольник,

*AC, BD — его* диагонали, 4 2

*AC BD —— О, AO —— OC, А D*

*ВО —— OD.* Тогда *ABCD —* параллелограмм.

Площадь параллелограмма равна произведению *его* сто- роны на высоту, опуіценную на эту сторону.

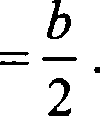
Прнмер 1. Параллелограмм и прямоугольник имеют оди- наковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, ec- ли площадь его равна половине площади прямоугольника.

*b*

*А, р Di*

Решенне: Пусть *ABCD —* параллелограмм с острым уг- лом *А.* Л iB *CMD —* прямоугольник. Тогда *AD —— А D —— а, AB —— А В —— Ь.*

ї) *Sg в,c,q —— ab, S yJBCD —— ah* 2

Тогда *h *

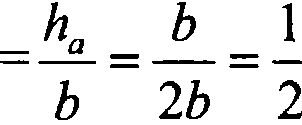
2) В *ЬABE НE ——* 90°, так что sinШ

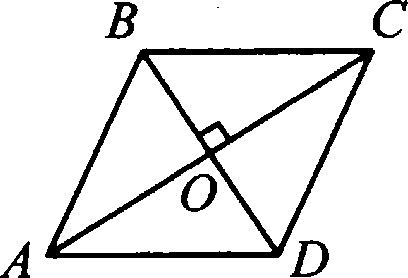
= 30°.

О т в е т: 30°.

*ab .*

2

, значит

**Hpuuep 2.** ,f{onaztirre, zoo nnoiuans poM6a paBiia nouOBMie iipoii3Beneiiiix dna- ro amen.

Peuieiiue: Hyczs *ABCD —* **OM6,** *AC*

*BD —* n aro an .

HMeeM

*I BO + DO) ——*

2

*I*2 *ACCBO + I*2 *AC DO ——*

*AC BD*

2 *AC-BD ——* 2

'Pro zpe6OBanOcs nonaoaze.

**Tpaxeuxs**

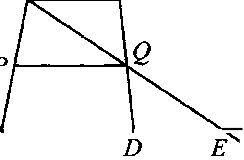
*O n* p e n e u e e . *Tpanequi — omo 4-yeonbiiHK, 8 KOmopOM bae npomuaonono:›iciioie cmopoiioi napanneHbHoi (ociioaaiiun mpa- nequu), a bae bpyeue — item (6ou:oaoie cmopoiioi mpaneyuu).*

Huouians zparieiui paa a npo 3Bene riio nonyGyMMsi ee oc- iioBauuii ma Bsicozy.

*O n* p e n e u e e . *Cpebua nuiiu» mpanequu — omo ompe-*

*:sox:, coebuiiimujuu cepebuubf ee 6oKOablx cmopoii.*

Teopeua. Hyczs *PQ —* cpenrix8 *B c*

mearix zpaneuu *ABCD.*

Torpa *PQ AD, PQ BC,*

1. *(AD + BC) .*
2. *A*

Ilnouians zpaneuu panda npo 3- Beneiiiiio ee cpeniieii minute ma Bsicozy.

Hpuuep 1. Haiipuze wo- *B C*

mans zpaneu , y xozopoii

napaunens sie czopo st 60 CM

1. 20 cc, a enapanneus ste —

13 cM x 37 cM.

*A H E D*

Peuieiiae: Hyczs *ABCD —* vpanes, *AD z BC —* ocHOBa-

rix; *AD ——* 60 GM; *BC ——* 20 GM; *AB ——* 13 cM; *CD ——* 37 cM.

*AD+*

*ABCD* 2

Нусть *АН —— х, НЕ —— BC ——* 20, тогда *ED —— AD — АН — НЕ ——*

= 60 — 20 — т — (40 — т).

В *ЬABH z I ——* 90°, по теореме Пифагора имеем:

*ВН2 —— AT — АН2 ——* 169 — т 2.

В *bCDE ——* 90°, по теореме Пифагора:

*СЕ2 —— CD2 — DE2 ——* 1369 — (40 —3 )2 = 1369 — 1600 + 803 —

— 2 = 803 — 2 — 231.

Но *ВН 2 ——СЕ2, чvo* 169 — т2 = 80a — т2 — 231, 80a = 169 + 231, 803 = 400, = 5.

Значит, *АН ——* 5, тогда

*ВН 2 ——* 169 — 25, *BH ——* 1 , *BH ——* 12.

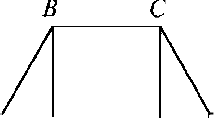
Следовательно,

60 + 20 2

*’ABCD*

2 - 12 = 40 12 = 480 (см ).

О т в е т : 480 см2.

**Пример 2.** В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боко- вая сторона 25 см. Найдите площадь трапеции.

Решение: Пусть *ABCD —* трапе- *А н Е D*

ция, *AB —— CD ——* 25 см, *AD ——* 24 см,

*BC ——* 10 см.

*ЬABH ——bCED (НИ —— НE ——* 90°, *AB —— CD, BH —— СЕ).* Тогда

*АН —— ED ——(AD — BC) :* 2 = (24 — 10) : 2 = 7.

Тогда по теореме Пифагора:

*BH ——*

*AB 2 — АН 2 ——* 625 — 49 = 5 = 24 .

Следовательно,

*AD+ BC - ви* 24 + 10 24 = 17 24 = 408 (см2).

*ABCD* 2

О т в е т : 408 см2.

Прнмер 3. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 см, боковая сторона 17 см и диагональ 39 см. Найди- те площадь трапеции.

Решение: Пусть *ABCD —* трапеііия.

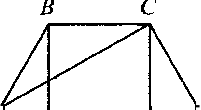
Найдем площадь *bACD по* формуле Герона:

*’A CD “*

1351-0

- 33 6 = 11 3 2 5 = 330 .

Qaлee: *СЕ ——* 2’ ACD 660 15

*AD 44*

*ED —-* 172 — 152 = 332- 2 = 8,

*BC —— AD — 2ED ——44 —* 16 = 28, тогда

44 + 28 2

*ABCD* 2 - 15 = 540 (см ).

О т в е т : 540 см2.

*А Н Е D*

**Правильные многоугольники**

*О п* р е д е л е н и е . *Многоугольник называется выпуклым,* если этот многоугольиик целиком находится в одной полуплос- кости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Сумма всех внутренних углов выпуклого в-угольника рав- на 180’(в — 2) .

Выпуклый многоугольник называется правильным, если

все его стороны и углы равны.

Пример 1. Углы выпуклого четырехугольника пропор- циональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

Решение: По теореме о сумме углов многоугольнта имеем:

34 = 180-° (п — 2) = 180°-(4 — 2) = 180° 2 = 360°.

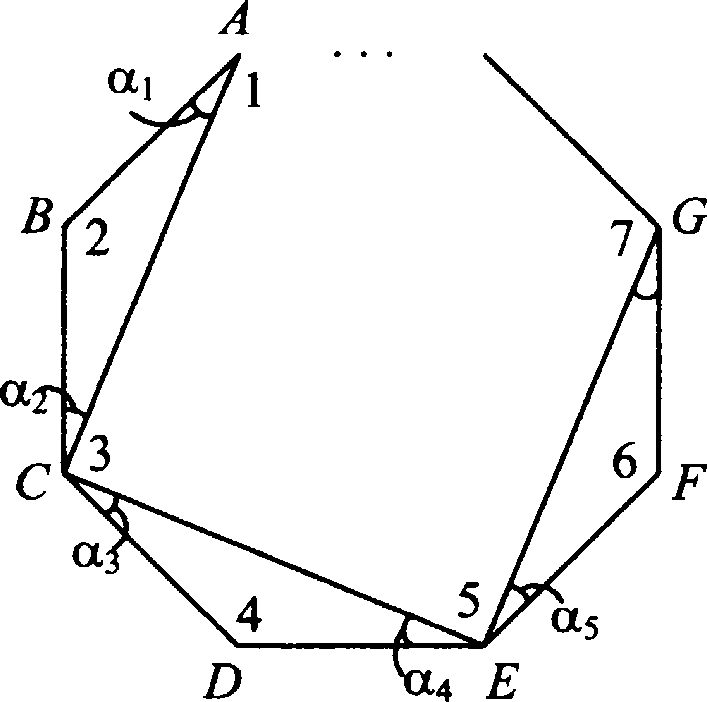
Пусть градусная мера i-ro угла k°, 2-ro — 2k°, 3-го — 3k° и 4-гo — 4k°. Так как сумма всех углов 360°, получим уравнение:

k + 2k + 3k + 4k = 360°; 10k — 360°; k — 36°.

Значит, i-й угол — 36°, 2-й — 72°, 3-й — 108°, 4-й — 144°.

**Прнмер** 2. Докажите, этo взятые через одігу вериіины пpa- вильного 2п-угольника являются вершинами правильного ч- угольника.

Решение: Обозначим через 1, 2, 3, ..., 2п—3, 2в—2, 2в—l, 2в вершины правііпьного 2п-угольника. Объединим их по две и составим в пар (1, 2); (3, 4); (5, 6); ...; (2s—3, 2в—2); (2п—1, 2в).

Соедиюім последовательно отрезками первую вериіину каждой пары с первой веріюі- ной последующей пары (i — с 3, 3 с 5, ..., 233 с 231),

из (п—1) звеиьев. Соединим далее отрезком (231)-ю вер- іівіну с i-й и построим n-



Рассмотрим *bABC* и

*bCDE .*

*AB —— CD, BC —— DE* (как стороны правильного многоуголь- ника); *ZB —— MD* (как углы правильного многоугольника). Значит, *bABC ——bCDE (по* l-му признаку), отсюда *AC —— СЕ.* Аналогично доказывается, что все стороны построенного п-угольника равны.

Рассмотренные треугольники равные и равнобедренные,

Далее: ШCf= — —Лщ ; *ZCEG* = W — n 4 — in, ; *ZBCD —— ZDEF ,* т.к. 2п-угольник правильный, следовательно *С( —— ZCEG . А:надо о ;аоппзь я* равенство между собой остальных внутренних углов построеннот п-уголывіка, следовательно, этот п-угольник правильный, что и требовалось

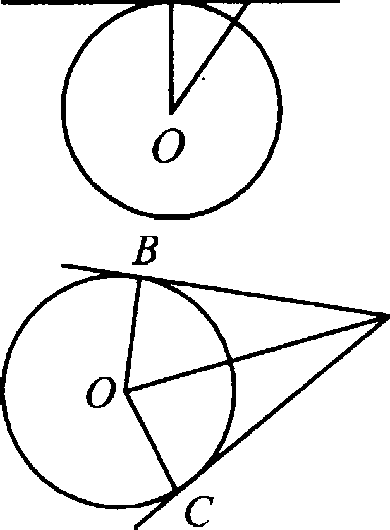
* 1. Окружность



Определение. *Окружность — множество всех точек, равноудаленных от данной точки (центра окружности).* Ра- диус окружности — отрезок, соединяющий тоику окружности с ее центром. Секуіиая — прямая, проходяіиая через 2 тоики окружности. Хорда — отрезок, соедиияющий 2 точки окруж-

ности. Диаметр — хорда, проходящая через центр. Касатель- ная — прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней только одну обіцую точку (точку касания).

Теорема 1. (свойство касательной). *А В р*

Пусть прямая *а* касается окружности с центром в О в точке *А .* Тогда *OA L а.*

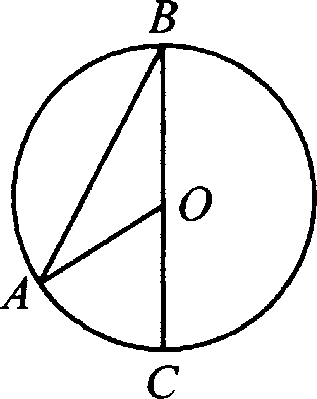
Теорема 2. Пусть *А* лежит вне ок- *О*

ружности, *AB* и *ЛС* — касательные.

Тогда *AB —— AC* и *ZBAO —— ZOAC . А*

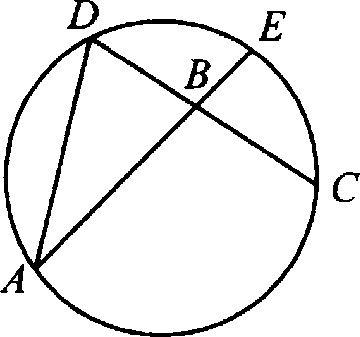
Теорема 3. (обратная к теореме 1). о Пусть *OA —* радиус окружности, *а L OA,*

*А в а.* Тогда п — касательная. С

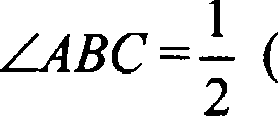
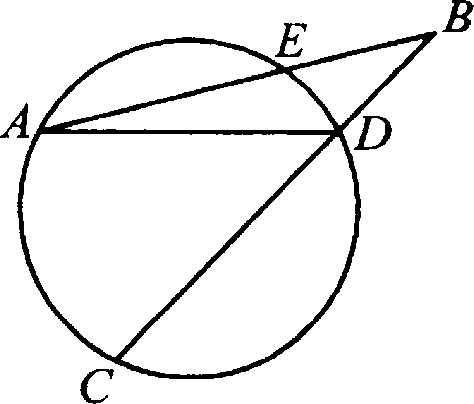
*О п* р е д е л е н и е . *Центральный угол — угол, образован- ный двумя радиусами окружности. Вписанный угол — угол, образованный двумя хордами, проведенными из одной точки окружности.*

Теорема 1. Пусть *BC —* вписанный в окружность с центром О.

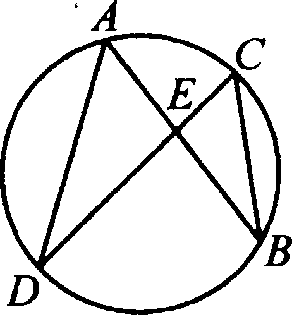
Тогда *ВВС ——2 AC .*

Теорема 2. Пусть ЛЛ и *DC —* хорды, ne- ресекающиеся внутри круга.

Тогда *ВВС —— ( AC + DE ).*

Теорема 3. Пусть *AE н CD — оцен-* ки секущих, пересекающихся вне круга в точке *В.*

Тогда *AC — DE ).*

Теорема 4. Пусть *AB* и *CD —* хорды ок- ружности, *AB CD —— Е.*

Тогда *AE BE ——СЕ- DE.*

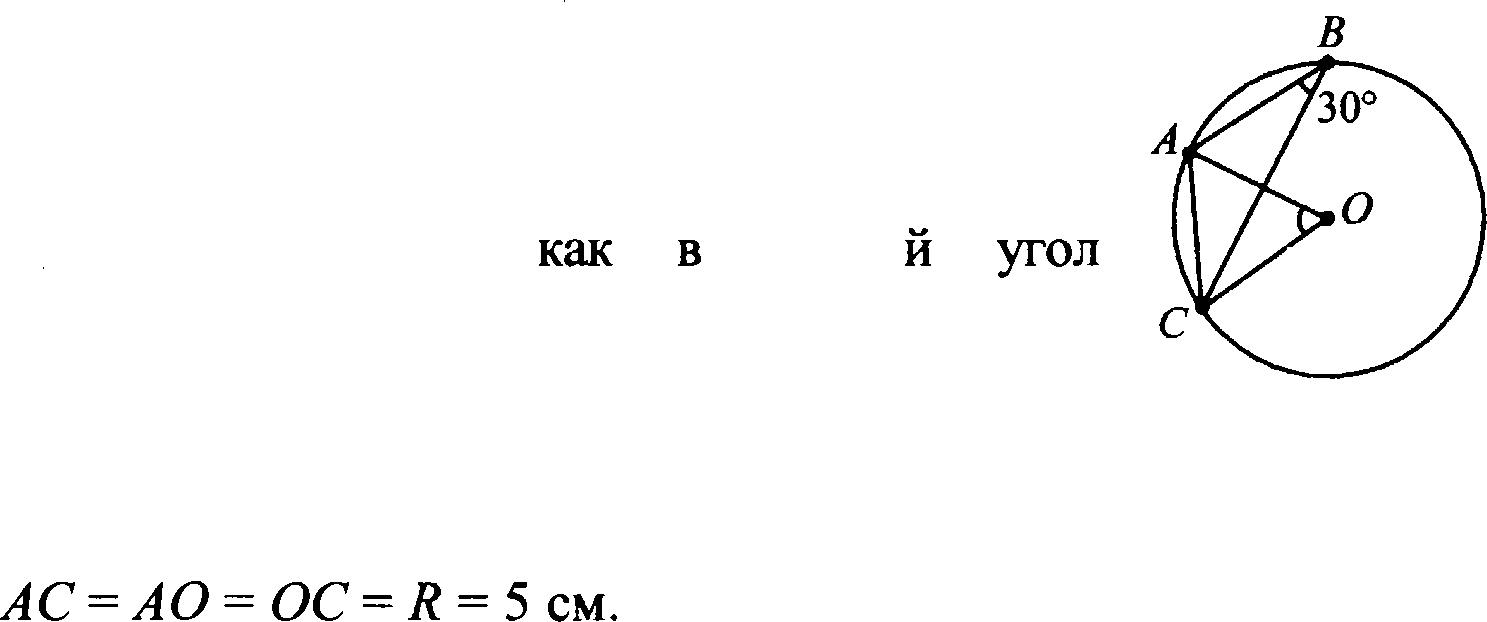
Теорема 5. Пусть точка *М —* вне круга, W — касательная, *MC —* секущая. Тогда

3f4 2 = ЗЯ-І *MC* (квадрат касательной равен

произведению секуіией на ее внешнюю

часть).

Длина окружности: f = 2яf, где f — длина окружности, а Л — ее радиус. Kpyг с центром в тоике О радиуса Л это множество таких точек Ј, что OН Я. Площадь круга: S = кfi2, где S — площадь круга, а Л — его радиус.

**Прнмер 1.** Тоики *А, В, С* лежаг на окруж- ности. Чему равна хорда *AC, тя:н* угол *ABC* равен 30°, а диаметр окружности 10 см?

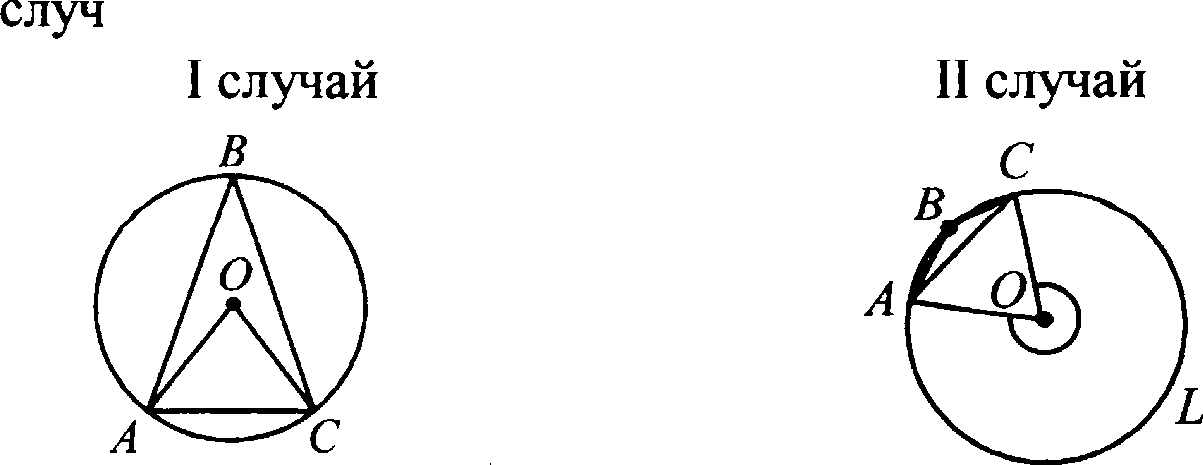
**Решение:** Так писанны O‘

*ABC ——* 30°, то соответствующцй ему централь-

ньІй угол будет 60°, то есть *Ш OC ——*60°.

Рассмотрим *ЬAOC.* Так как *AO —— OC* (как раднусы ок- ружности), а TO = 60°, то *ЬAOC —* равносторонний, значит

О т в е т : *AC —— 5* см.

**Пример 2.** Точки *А, В, С* лежат на окружности. Чему равен угол *ABC,* если хорда *AC* равна радиусу окружности? (Два

Решение: 1) *НОС* является центральным для *ВВС.*

Так как *AC —— AO ——OC,* то *ХАОС* равносторонний, следова- тельно *OC ——*60°, а

*В ВС —— Ш OC ——* 30 0 .

2

2) *OC* в *ХАОС* равен 60°, значит дуга *ABC* равна 60°, а дуга *ALC* равна 300°.

*ВВС ——*

2

300° = 150°.

О т в е т : *ВВС ——* 30° или 150°.

**Пример 3.** Хорды окружности *AD* и *BC* пересекаются. Угол *ABC* равен 50°, угол *ACD* равен 80°. Най- дите угол *CAD.*

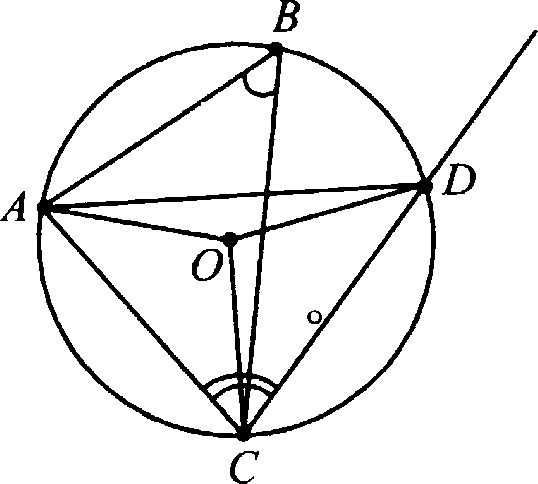
Решение: *MC —— ВВС ——* 50° —

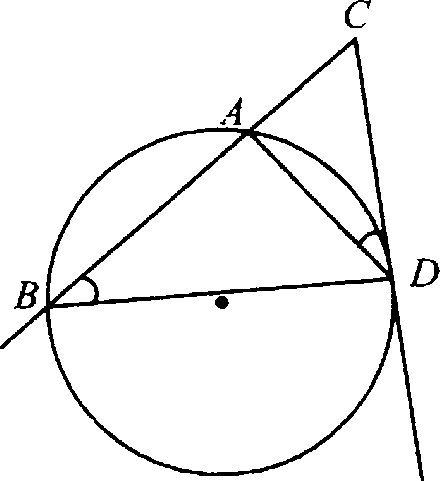
как вівісанные, опирающнеся на одну хорду. Тогда *ZCAD ——* 180° — *MC —*

— *ACD ——*180° — 50° — 80° — 50°.

О т в е т : 50°.

50°

80

**Пример 4.** покажите, что произведе- ние отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведен- ной из той же точки: *AC- BC ——CD•.*

Решение: *ШBD —— ZADC.*

Рассмотрим *kCBD* и *MCD.*

*ZCBD —— ZCDA —* 2 *AD ; MC —* общий,

поэтому *kCBD bACD по un* углам, значит: *BC CD*

*CD AC*

да имеем: *CC —— AC-BC. Ru* и требовалось доказать.

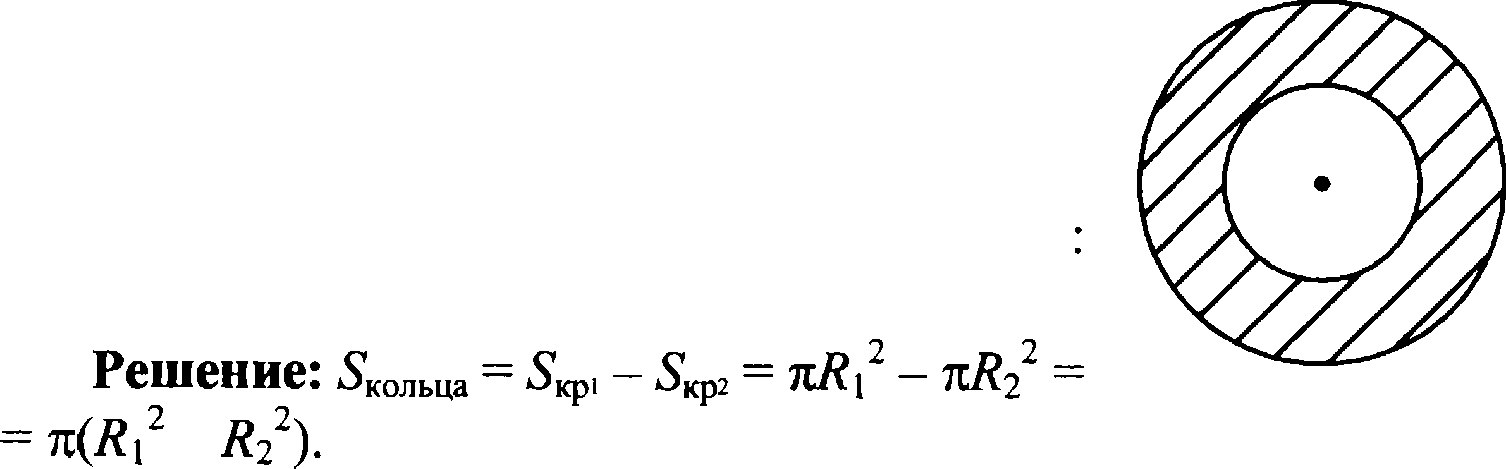
Пример 5. Вычислите длину окружности, если радиус ра- вен: 1) 10 м; 2) 15 м.

Длина окружности вычисляется по формуле:

f = 2я .

Решение: 1) Л = 10 м, *I ——* 2кfi = 2-3,14 10 — 62,8 м;

2) Л = 15 м, *I ——* 2кfi = 2-3,14- 15 = 94,2 м.

О т в е т : 62,8 м; 94,2 м.

Прнмер 6. Найдите площадь кругового кольца, заключенного между двумя окружно- стями с одним и тем же центром и радиусами 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3) *а н b, а* > *Ь.*

Так что

1) Ѕу' ольца

Й(36 16) = 20a см';

1. 'колвца

Й(695 '5952) з(6,5 — 5,5)(6,5 + 5,5) — 12a сМ ;

1. ко' лвца

*R(a b 2* см'

* 1. Векторы

О п р е д е л е н и е . *Вектором* называется *иапратіепиый отрезок,* т.е. отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой концом.

Qвa вектора называются *коллииеариыми,* если они лежат на одной прямой или на параллельньж прямых.

Два вектора *AB* и *CD* называют *одинаково направленпы- ми,* если две полупрямые *AB* и *CD* направлены одинаково.

Qвa вектора *AB* и *CD* называют *противоположио na- правпепиыми,* если две полупрямые *AB* и *CD* направлены про-

ТНВОНОЛОХН-ІО.

*Абсолютной величиной (модулем) вектора* называют дли- ну отрезка, который изображает вектор. Обозначается

*Нулевым вектором* называется такой вектор, начало кото- рого совпадает с его концом.

Qвa вектора *равиы,* если они совмещаются параллельным переносом.

Равные векторы одинаково направлены и равны по моду- лю, и обратно: если два вектора одинаково направлены и рав-

НЫ НО МОД ЛЮ, ТО ОНИ ]Зі1ВНЫ.

Пусть точка *А х )* начало вектора *а , и* точка *A2 xz;*

r2 — его конец. Тогда *координатами сектора ‘а* называются

числа *а* ——xi — *xi* и *az ——лz —лі. \_*

*Суммой двух векторов а ; а ) и Ь(Ь, ,by)* называется век-

тор с *а + bii а›+ bz!.*

*Произведением сектора а,, а ) на число а* называется вектор *(аа,,аа ) .*

*Скалярным произведением векторов aс , а )* и *b, ,by)* на-

зывается число *а b +azbz.*

Теорема. Скалярное произведение векторов равно произ- ведению их модулей на косинус угла между этими векторами.

**Пример 1.** Абсолютная величина вектора *0* (5; ю) равна

13, а вектора *b п,* 24) равна 25. Найти в и *т.*

Решение: Абсолютной величиной вектора назьнается длина отрезка, изображающего вектор, *0 а ; ад.*

*ДО —— а + а*

13 = 5' + ' , 169 = 25 +

2 = 144, — 312.

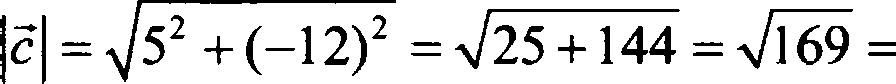
25 = в' + 24' , 252 = ' + 242, 625 = в' + 576, 2 = 49, = 37.

О т в е т: *т ——+*12; в = 37.

**Пример 2.** Найдите вектор с = а *— b* и его абсолютную величину, если l) fi (1; — 4), *b (--4;* 8); 2) а (—2; 7), *b* (4; — 1).

Решение: *ё = а — b;*

1)*0* (1; — 4), *(--4,* 8), ? (/ — (--4); — 4-8);

(5; — 12), 13 ;

2) п (—2; 7), *b* (4; — 1), й (—2 --4; 7-—(—l)). с = (—6; 8);

? = 3636+4 = 1 = 10.

О т в е т: 1) й(5;—12), )с) = 13; г(--б;8), )є) = 10.

**Пример 3.** раны векторы *0* (3; 2 ) и *k* (0; —1). Найдите

вектор с *= —* 2 *а* + 4 *н* его абсолютную величину.

**Решение:** fi (3; 2), 6 (0; — 1);

є *= —* 2 *а* + 4 6;

—2 *а ——* (—2 - 3; —2 - 2) = (— 6; —4); 4 *b ——*(4 - 0; 4 (—l)) = (0; —4);

= (W + 0; — 4 + (——4);

є = (——6; — ву, јс Ј -(—6)3—g+ = Јі% = 10.

О т в е т: (Ю; —8); 10.

Пример 4. покажите, что векторы *а т’, п)* и (—п; m) перпендикулярны или равны нулю.

Решение: Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

*а- — а b* cos ii.

*0* = m -(—п) + п - m = 0 *ј-а* cosn = 0.

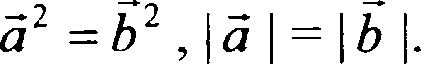
Если *0 , b* 0, то cos п = 0, п = 90° и векторы *а т, п)* и

*b(—n, т)* перпендикулярны.

Если *k ——*0 , то *m2+ 2 ——*0 =г *т —- п -—* 0, *а —— ——*0 .

Аналогично, если *b ——* 0, то *а —— ——* 0 .

Нример 5. Векторы *а + b* и *а — b* перпендикулярны. До— кажите, что *а —— .*

Решение: Так как (п *+ b )* и ( *є — )* перпендикулярны, то *а + )- k — ) ——* 0. То есть *є’ — 3 2 ——* 0.

Что и требовалось доказать.

Пример 6. Даны четыре точки *А* (l ; I), *В* (2; 3), С (0; 4),

*D (—I ;* 2). Докажите, что четырехугольник *ABCD —* прямо-

Решение: *А (I, I), В* (2; 3), С (0; 4), *D (—I ;* 2).

*) AB* (2—1; 3—1) = *AB (I,* 2), *DC* (0 + 1; 4-2) = *DC (I;* 2);

*AB —— DC* . Значит, *ABCD —* параллелограмм. 2) *AD* (—I—1; 2—I) = (—2; 1);

*AB AD —— -I* (—2) + 2 -1 = —2 + 2 = 0.

Значит, *BAD ——* 90°, *ABCD —* прямоугольник.

* 1. Прямая и плоскость в пространстве

Угол между прямой н плоскостью

Пусть п — плоскость, *а —* пересекающая эту плоскость прямая. *Проекцией прямой а на плоскость а* называется пря- мая *а',* которая является множеством оснований перпендику- ляров, опущенных из всех точек прямой *а* на плоскость п

*Углом между прямой а и плоскостью а* называется угол между прямыми *а* и п'

Угол между плоскостямн. Qвугранный угол

Пусть две плоскости пересекаются. *Qвугранным углом* на- зывается фигура, образованная двумя полуплоскостями и об- щей ограничивающей их прямой.

Эти полуплоскости называются *гранями двугранного угла,* а ограничивающая эти плоскости прямая — *ребром* данного *двугранного угла.*

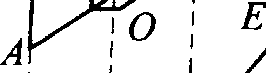
Проведем плоскость, перпендикулярную ребру; она пере- сечет данные плоскости по двум полупрямым.

Образованный этими полупрямыми угол называется лп-

*нейным углом двугранного угла.*

О п р е д е л е н и е . *Углом между пересекающимися плоскостями* назы- вается линейньєі угол двугранного yr-

ЛіІ, О **]3i13OBi1HHOFO ЭТНМИ ПЈІОСКОСТЯМИ**

Пример 1. покажите, что плос-  кость, пересекающая параллельные

плоскости, пересекает их под равны-

*у D*

ми углами.

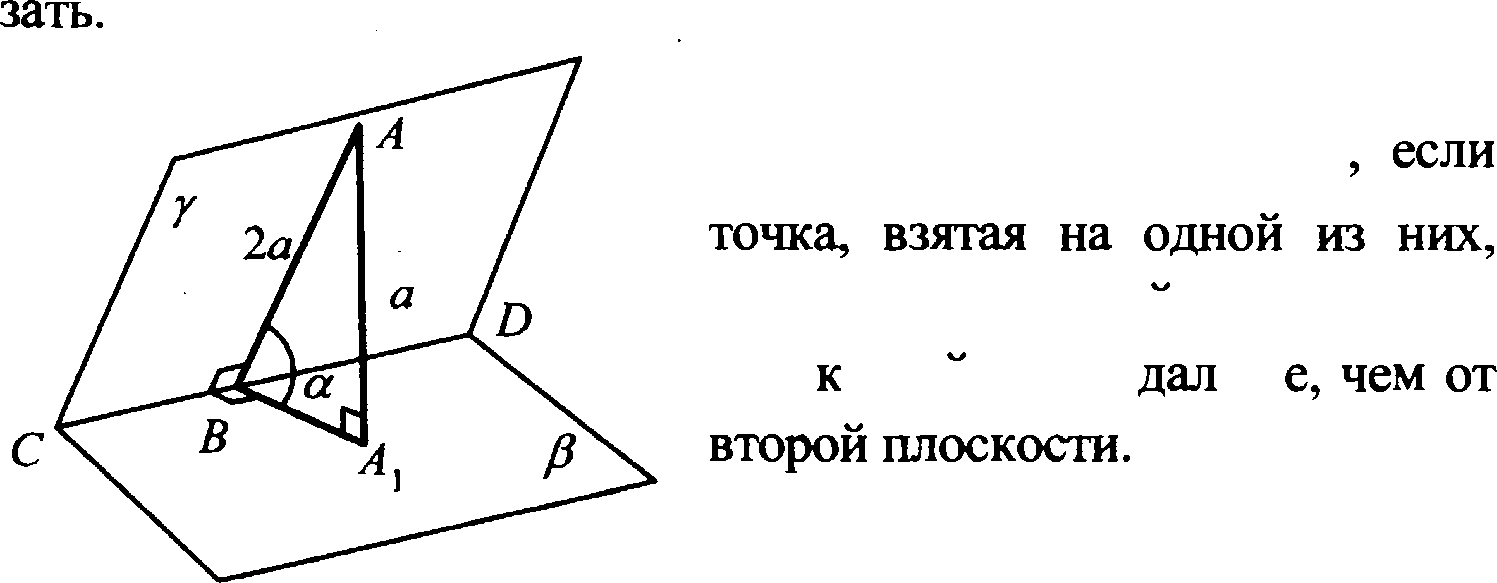
Решение: Пусть даны плоскость  п )Ј b и у пересекает их по прямым *AB*

и *CD* соответственно.

Тогда *AB CD (по* свойствам параллельным плоскостей). Проведем в плоскости у прямую с, перпендикулярную к

*AB MCD* и из точек О и О восставим параллельные перпеиди- куляры *ОЕ н О F к* прямым *AB* и *CD.*

Из рисунка заметил, uтo углы ‹р и Х — искомые. Эго ли- нейные углы двугранных углов, образованньт плоскостями п,

§ и у; Л‹р = ЛХ, так как это соответственные углы при парал- лельным npmiьm OН и *OF* и секущей с. Что и требовалось дока-

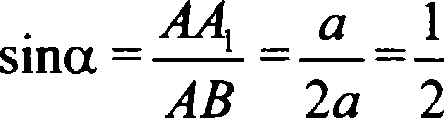
Пример 2. Найдите угол ме-

ч НЈІОСКОGТЯМИ И )

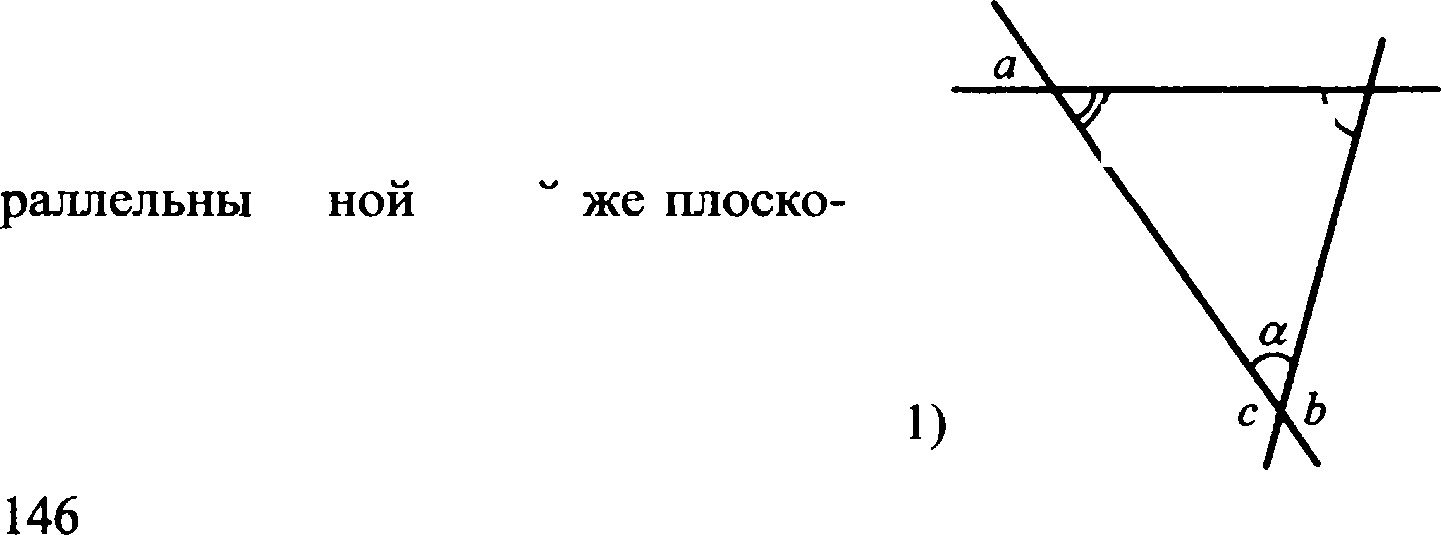
отстоит от прямои пересечения плос остеи вдвое ьш

**Решение:** Пусть § и у пересекаются по прямой *CD, А е ј .* Проведем *AB L CD* и 1 § . Тогда искомый угол *ABA* ра- вен п. Пусть W, = п, тогда *AB ——*2a.

Треугольник *ABA* прямоугольный, поэтому

 , так uтo п = 30°.

Угол межву скрещивающимися прямыми

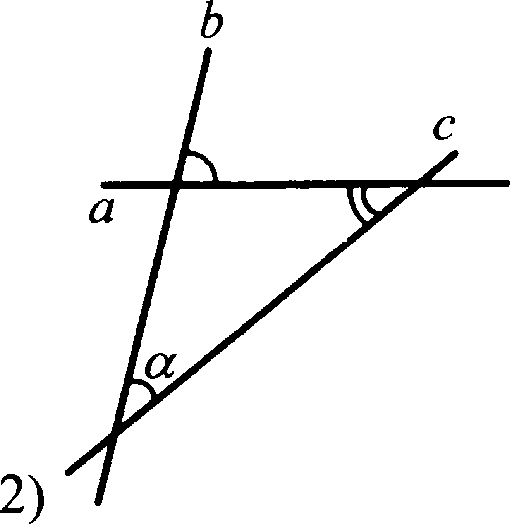
*О п* р е д е л е н и е . *Углом между скрещивающимися пря- мыми* называется угол между прямыми, которые параллельны исходным и пересекаются.

**Пример 3.** Прямме *а, b, с* na- 360° 80°

сти. Чему равен угол между пря- мыми *b* и с, если углы этнх прямых с прямой а равны 60° и 80°?

Решенне: Существуют прямые *а’, b* и с ’, параллельные прямым *а, b* и с, лежащие в одной плоскости. Углы между *а’, b’, с* равны углам между *а, b* и с.

l) п + 60° + 80° = 180°; ‹х = 40°.

80°

60°

2) п + 60° = 80°; ‹х = 20°.

Расстоянне между скрещивающимнся прямыми

О п р е д е л е н и е . Общtнг *перпендикуляром Дух с ш;п-* ваюіцихся прямьт называют отрезок, концы которого лежат на этих прямых и которьйі перпендикулярен каждой из них.

*Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми*

называется длина общего перпендикуляра этих двух прямых.

Расстояние от точки до прямой

О п р е д е л е н и е . *Расстоянием от точки до прямой* на- зывается длина перпендикуляра, опущенного от данной точки на данную прямую.

* 1. Многогранники

Прнзма

О п р е д е л е н и е . *Призмой* назьгвается многогранник, co-

GТОІІЩИЙ ИЗ liyx **J3itBHblX B£•IHyKJIhIX IUIOCKHX МНОГОЩОЛhНИ KOB**

*А)Az -- . Ар* и *В В ... Bp,* лежащих в параллельным плоскостях, и

параллелограммов *А,фВ В,; А В В ; ...; А A,B,B .* Много-

угольники называются *основаниями призмы,* а отрезкн, кото— рые соединяют соответствуюіцие вершины этих многоуголь- ников, — *боковыми ребрами.*

Свойство 1. Воковые ребра призмы параллельны и равны. О п р е д е л е н и е . *Высотой призмы* называется расстоя-

ние между основаниями.

*О п* р е д е л е н и е . *Боковыми гpaнямu призмы А А ... А* и

*В В ... В* называются четьІрехугольники *А В В А ; АzB В ,*

*., А В В„А . Ппоијадит боковой поверхности призмиі* на- зывается сумма площадей всех ее боковых граней.

Теорема 1. Объем призмы равен произведению площади

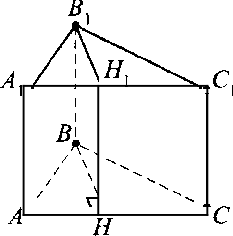
основания на высоту:

*У —— S- Н.*

Теорема 2. Площадь поверхности призмы равна сумме двух площадей основания и площади боковой поверхности.

S = 2Sq, + бок.

О п р е д е л е н и е . *Пpаwoй призмой* называется призма, основания которой перпендикулярны боковым ребрам.

Теорема 3. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основа-

ния на высоту

Прнмер 1. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см,

17 см и 21 см, а высота призмы — 18 cc. Найдите площадь сечения, пpo- веденного через боковое ребро, и меньшую высоту основания.

Решение: Данным сечением является прямоуго.чьник *BHH IB I* со сторонами *BB ——* 18 см и *BH, где BH —* меньшая высота *ЬABC.*

Далее, іъзощадь основания с одной стороны равна:

*S ——*

*ppр—- а)*

*b)(р - с) —-*

= 24(24 — l0)(24 —17)(24 — 21) = 84.

С другой стороны *S -— AC- ВИ ,* так что

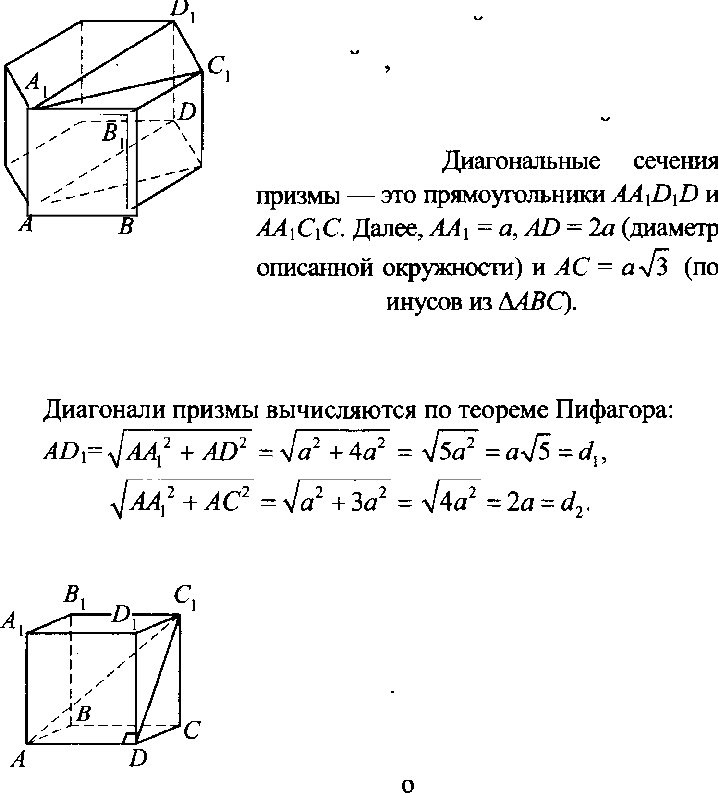
2

*ви —* 2 2 84 = 8.

*AC* 21

Тогда искомая площадь сечения равна S = *BB- BH ——* 18 8 = 144 (см2).

О т в е т : 144 см2.

Прнмер 2. Основанием призмы яв- ляется правильныи шестиугольник со сторонои а а боковые грани квадра- ты. Найдите диагонали призмы и пло- щади ее диагональньт сечении.

**Решение:**

теореме кос Так что площади сечений равны:

*S = АА* - *ЛС* ——*а* - *а* 3 *=a2* 3 и *S2=* ]’ *AD —— а-* 2a = 2a .

*AC ——*

О т в е т : *S ——а’ 3 i* 52 *=* 2a *; d —— at ; d2 =* 2a.

**Пример 3.** ,f[иагональ правильной че- тырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы

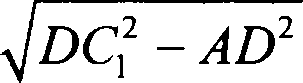
Решение: Так как по условиіо пpuoмa правильная, то *СС, С* и *DCШD.* Так что по теореме трех перпендикулярах

*CMDCD.* ,f{aлee, в прямоугольном *ВACMD по* теореме Пифаго-

ра находим:

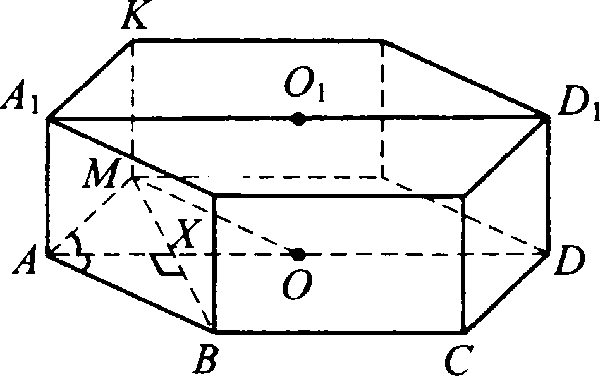
*AD —— C,A— DC,’ ——* 3,5' — 2,5' = 6.

Тогда в прямоугольном *bDCi С по* теореме Пифагора найдем:

= 2,5 — 6 = 0,5.

Далее, U = *S BCD- СС, —— AD’ - СС, ——*-6 0, 5 = 3 (смЗ).

О т в е т: U = 3 см'.

**Пример** 4. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального се- чения 4 м2, а расстояние между

DByMIi **НQОТНВОНОЛОЯОІ1•ІМИ** КО-

выми гранями 2 м. Найдите объ-

ем призмы.

Решение: Наибольше диагональное сечение это *АА D D.* Тогда *AD —* диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника.

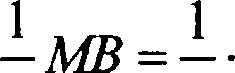
Так что *AD ——* 2Я и *AB —— АМ ——R.*

*ZMAB* найдем по формуле:

*хіияв* 180 (п — 2) 180 -(6 2 = 120‘ .

'

п 6

Тогда = 2 *ЖИВ* ——60‘ и 3fY = 2 2

Далее, в прямоугольном ABA

*АМ ——* 3f 1 2 23

Так что Л = *АМ ——* 2

“

3

Значит, *ЛD* —— 2Л = 43

2=1.



2

А поскольку *S q D —— АА-, AD ——* 4 м , то W =

Далее, площадь основания равна площади шести равно- сторонних треугольников, т.е.

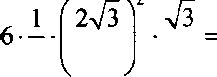


= 2 .

*АМ-*

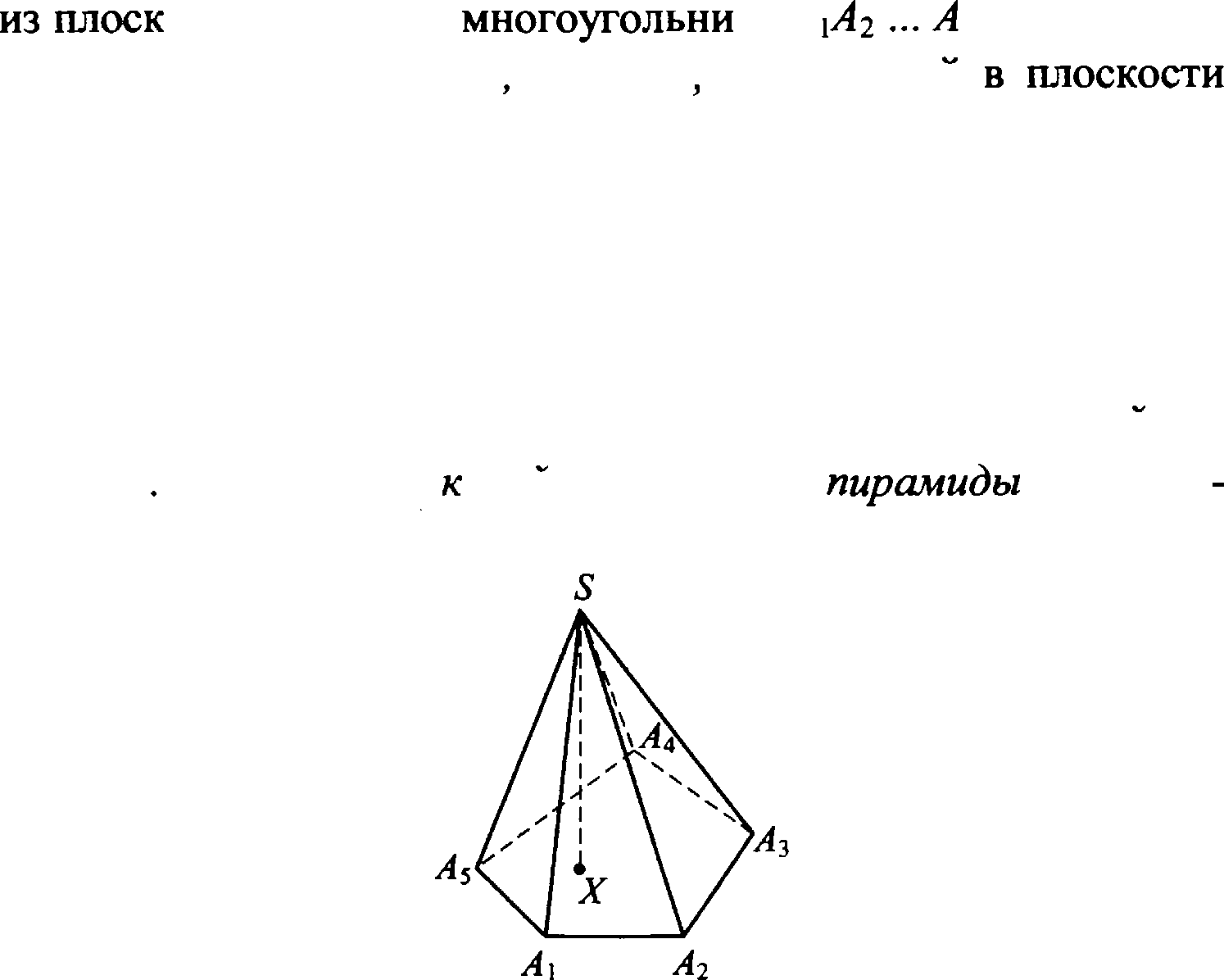
2

*AO-* sin 60’ =

2 3 2

Тогда U = fiq, - W, = 2 = 6 (м').

О т в е т. 6 мЗ.

О п р е д е л е н и е . *Пирамида —* многогранник, состоящий ого выпуклого ка *А „* назмваемо-

го основанием *пирамиды хoчпя S,* не лежащеи

основания, называемой *вершиной пирамиды,* и треугольников ЅЛ Л 2› *SA2A ;* ..., *SA А ,* называемых боковмми гранями mipa- миды. Огрезки, которые соединяют вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами.*

О п р е д е л е н и е . Опуіиенный из вepшинія пирамиды на плоскость основания перпендикуляр называется *высотои пи- рамиды Площадью бо овои поверхности* называет ся сумма площадей всех ее боковых граней.

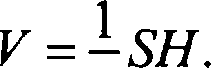
*Площадью полной поверхности пирамиды* называется сумма площадей всех ее граней и площади основания.

*Правильная пирамида —* пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а отрезок, соедиияющнй вершину пирамиды с центром основания, является ее высокой.

Треугольная пиранида называется *тетраэдром.*

Тетраэдр, все грани которого являются равносторонними треугольниками, назьгвается *правильным тетраэдром.*

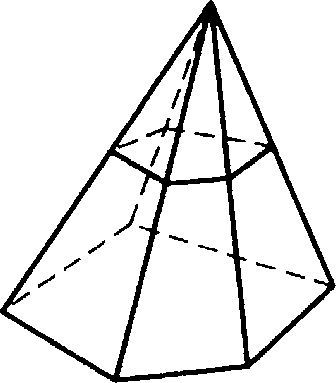
Теорема. Объем пирамиды равен одной трети произведе- ния площади основания на высоту

3

Усеченная пнрамида

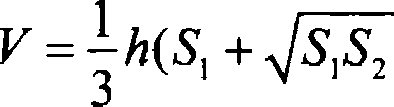
Теорема. Плоскость, пересекающая пирамиду и парал-

лельная основанию, отсекает подобную пирамиду.

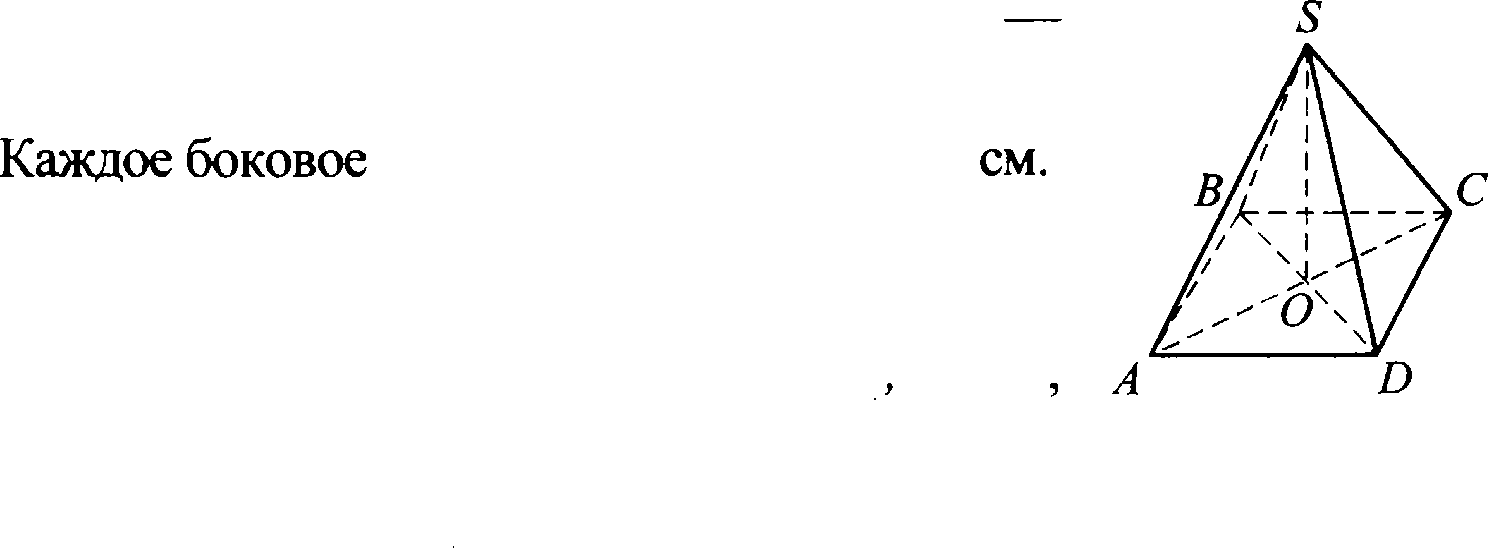


О п р е д е л е н и е . Часть пирамиды без ее отсеченной час- ти называется *усеченной пирамидой.*

Теорема. Объем усеченной івірамидьІ равен

 *+ So ),* где *h —* высота усеченной пирамиды,

S , S2 — площади ее оснований.

Нример 1. Основание пирамиды прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см.

ребро пирамидьІ равно 13

Вычислите высоту пирамиды.

Решенне: Так как *SA —— SB —— SC —— SD,* то прямоугольные треугольники *ASO BSO CSO* и *DSO* равны по гипотенузе и общему катету SO.

Тогда *AO —— ВО —— СО —— DO.* В прямоугольнике есть един- ственная точка, равноудаленная от вершин (докажите) точка пересечения диагоналей, а значит точка fi является точкой пересечения ЛС и *BD.*

В *bABD:*

*В — A+B 2*

*AD 2 ——* 6 2 + 2 = 10 (см).

Тогда *OD -— BD ——*5 (см).

2

Qaлee, в *bSOD по* теореме Пифагора

*SO —— SD — OD2 -—* 132 — 52 — 12 (см).

О т в е т: 12 см.

**Пример 2.** У четырехугольной усеченной пирамиды сто- роны одного основания равны 6, 7, 8, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.

Решение: У усеченной пирамиды основания подобны.

Зная меньшие стороны нижнего и верхнего оснований, найдем

коэффициент подобия: *k ——* 5

6

Тогда соответствующие стороны другого основания равны

-7 *k ——* 7*- 5* 35 (см), 8 *k —— -8*

6 6

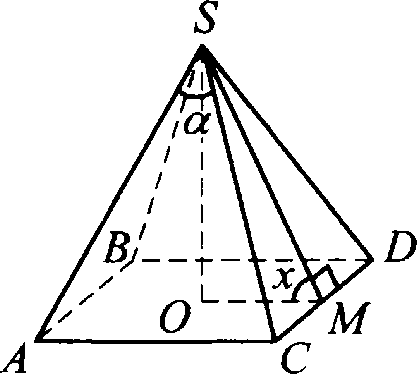
5 \_ 20

6 3

9 *k* ——9

5 15

б 2

Пример 3. В правильной четырехугольной пирамиде пло— ский угол при вершине равен п. Найдите двугранный угол т при основании пирамиды.

Решение: Высота *50* правильной четырехугольной пира-

миды проходит через центр пересечения диагоналей *AD* и *BC.*

Проведем *SM L DC.* Тогда по теореме о трех перпецдику— лярах *ОМ L DC.*

Значит, *ОМ —* рапиус окружности, вписанной в квадрат,

поэтому *ОМ —— AB*

2

В равнобедренном ADSC *ZDSC —— а.* Вы-

сота *SM* является медианой и биссектрисой, так что

*см-— CD .* в *asмc* : *лм—— СМ CD*

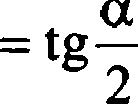
2 2

'g 2 2tg2

Так как *ZSMO яппяшся* линейньш углом двугранного уг- ла, образованного плоскостью основания и боковой гранью, то *ZSMO -- х н* из *ЬSMO:*

cos *х* ——cos *ZSMO ——*

*CD* 2ig *—*

 2

*SM*

Так uтo *х* ——arccos tg2 .

*-*2 *CD*

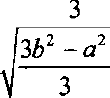
**Прнмер 4.** По стороне основания *а* и боковому ребру *b* найдите обьем правильной пирамиды: 1) треугольной, 2) че- тырехугольной, 3) шестиугольной.

Решенне: В правильной пирамиде высота проходи через центр окружности, описанной около основания. Тогда:

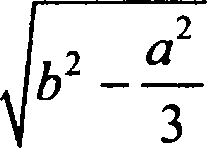
1. Площадь основания равна площади равностороннего

треугольшіка: *Sq —— a*

4

Радиус описанной окружности *AO ——*

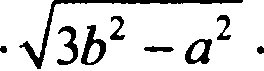
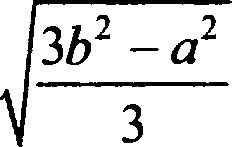
Тогда в ЫlOi O:

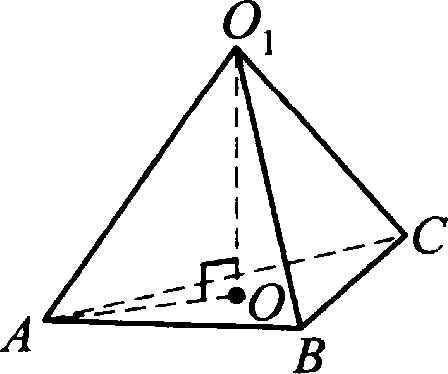
OOi *= pAO - AO’ = b’ - a* =

*z*

Так что

Зb’ *- a 2*

1 *a 2 3 Зb’ — а’ a2*

*V = S* ОО, = 3 4 3 12

1. Основание — квадрат с площадью Sp =n2. Радиус опи- санной окружности *AO* равен половине диагонали квадрата:

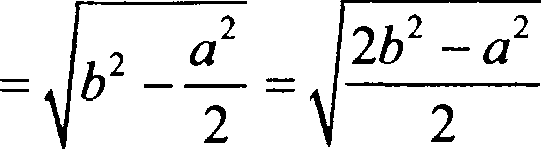
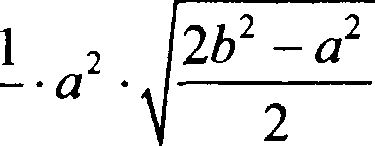
*AO Ae* = . Далее, в А ОО :

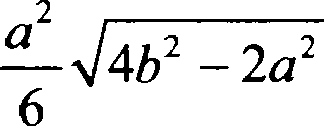
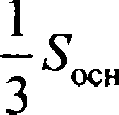
*z*

 *OАAO—2*

Так что U =

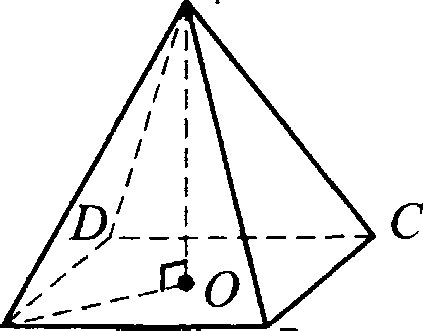
*АAОO2*

2 2

- ОО =

3 2

*О*

*А В*

1. Площадь основания равна площади правильного шести- угольника, то есть площади шести равносторонних треуголь- ников со стороной *а.*

4 2

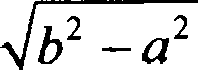
Далее, радиус описанной окружности равен стороне осно- вания *AO ——а .*

Тогда в ШО I : i О, = *AO — AO* = *b2 — а’* .

Так что

- ОО, =

i з,

3’ 2

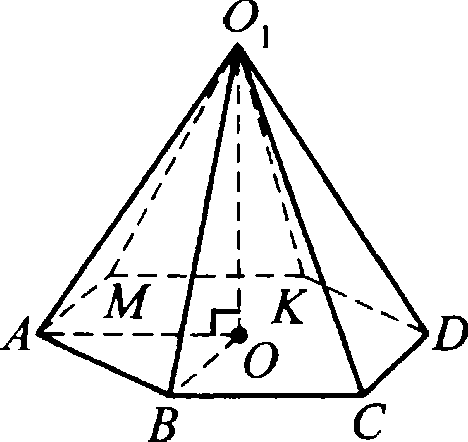
*a 2*

- 3(3

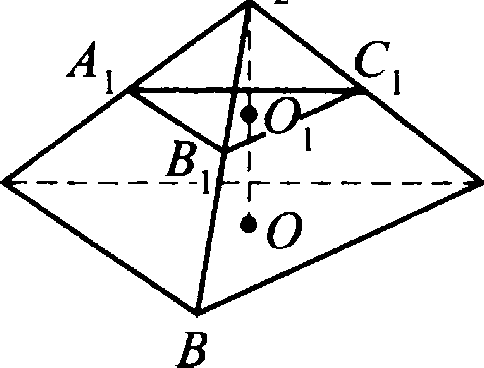
2

2 — *a*

*2 ) .*

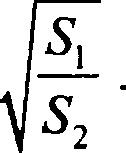


Нрнмер 5. В пирамиде с площадью основания Si проведе— но сечение, параллельное основанню, на расстоянин *h oн* него. Площадь сечения Лz. Найдите высоту пирамиды.

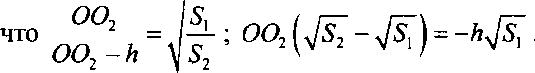
O 2

*А,*

*А -- ———В - --——- С*

Решение: Сечение отсекает от данной пирамиды подоб- ную пирамиду *O zA* iB i *< › .* Так как площади подоfіных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то *k -— *

Линейные размеры подобных фигур относятся как коэф- фициент подобия.

Так 

è

›/'Ё

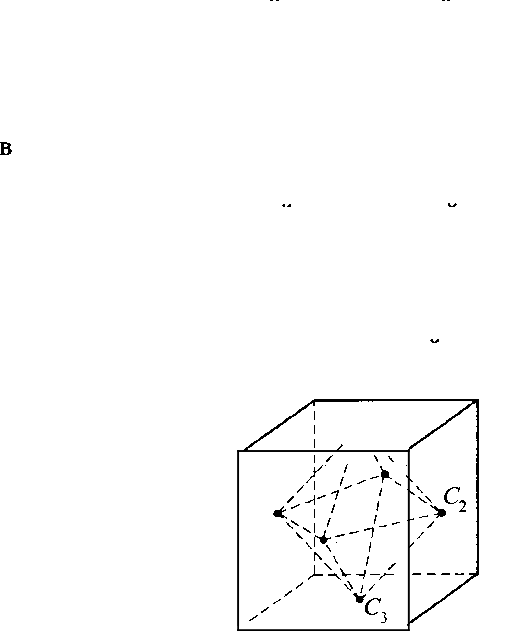
Итак, ОО =

**Правильиме многогранинкн**

О п р е д е л е н и е . *Выпуилый многогранник* называется *правильным,* если все его грани — правильные многоугольни- ки с одинаковым числом сторон и в каждой вершине много- гранника сходится одинаковое число ребер.

1. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками н такой, что в каждой его вершине сходится по три ребра, называется *правильньж тетраэдром.*
2. **ЫНуКЛ Ыи МНОГОГЈЗіІННИК** СО **СТОЈЗОНіlМИ** — **НЈЗіЗВИЛ ЬНЫМИ**

треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по четыре ребра, называется *октаэдром.*

1. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по пять ребер, назыоаегся *икосаэдром.*
2. Выпуклый многогранник со сторонами — квадратами и такой, что в каждой его вершине сходится по три ребра, назы- ается *кубом.*
3. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными пятиугольниками и такой, uтo в каждои его вершине сходится по пять ребер, называется *додекаэдром.*

Других правильных многогранников не существует.

Пример. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры гранеи октаэдра являются вер- шинами куба.

*'! •,'*

Решение: Обозначим центры граней куба *С , Суп, С , C4›*

*С 5і С б•*

Каждая грань куба граничит с четырьмя другими, так что каждая из точек *Су* будет соединена с четырьмя другими. Так как расстояния между центрами граней, имеющих общее реб- ро, в кубе одинаковы, то получим фигуру, имеющую 6 вер- шин, в каждой из которых сходится по 4 ребра, и все грани представляют собой правильные треугольники.

Значит, эта фигура — октаэдр. Наоборот:

Обозначим центры граней октаэдра *C ,C›, С ,C4.С ,Сб› C7› Су.* Каждая грань октаэдра граничит с тремя другими, так что центр каждой грани будет соединен ребрами с тремя соседни- ми центрами. Так как расстояния между центрами граней, имеющих общее ребро, одинаковы, то получится фигура,

имеющая восемь вершин; из каждой вершины выходят по три одинаковых ребра и все грани представляют собой квадрата.

Значит, эта фигура — куб. Что и требовалось доказать.

**5.7.Телавращенхs**

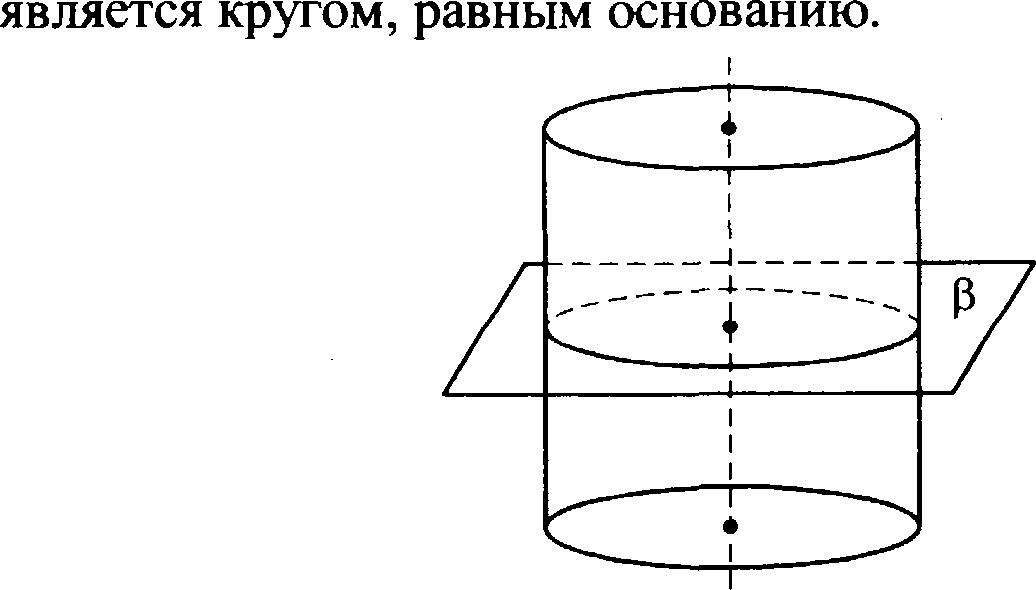
О п р е д е л е н и е . *Цилиндр —* это тело, ограниченное ііи- линдрической поверхностью и двумя параллельньши плоскостя- ми, пересекаюіцими эту поверхность (цилиндрическая поверх- ность это поверхность, получаемая таким поступательным движением прямой в пространстве, что каждая вьиlеленная точка прямой (образующей) движется вдоль окружности).

Круги, получившиеся в пересечениях цилиндрической по- верхности с плоскостями, называются осьов‹гьияяп *цилиндра,* а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, — *образующими цилиндра.*

О п р е д е л е н и е . Если образующие цилиндра перпенди-

**JIfI]3HbI IUIOCKOGTRM (KHOBilHH 1,** ТО **ІЈ)1НННДЈЗ Hil3hIBi1OTGII** *HpRMЪLM.*

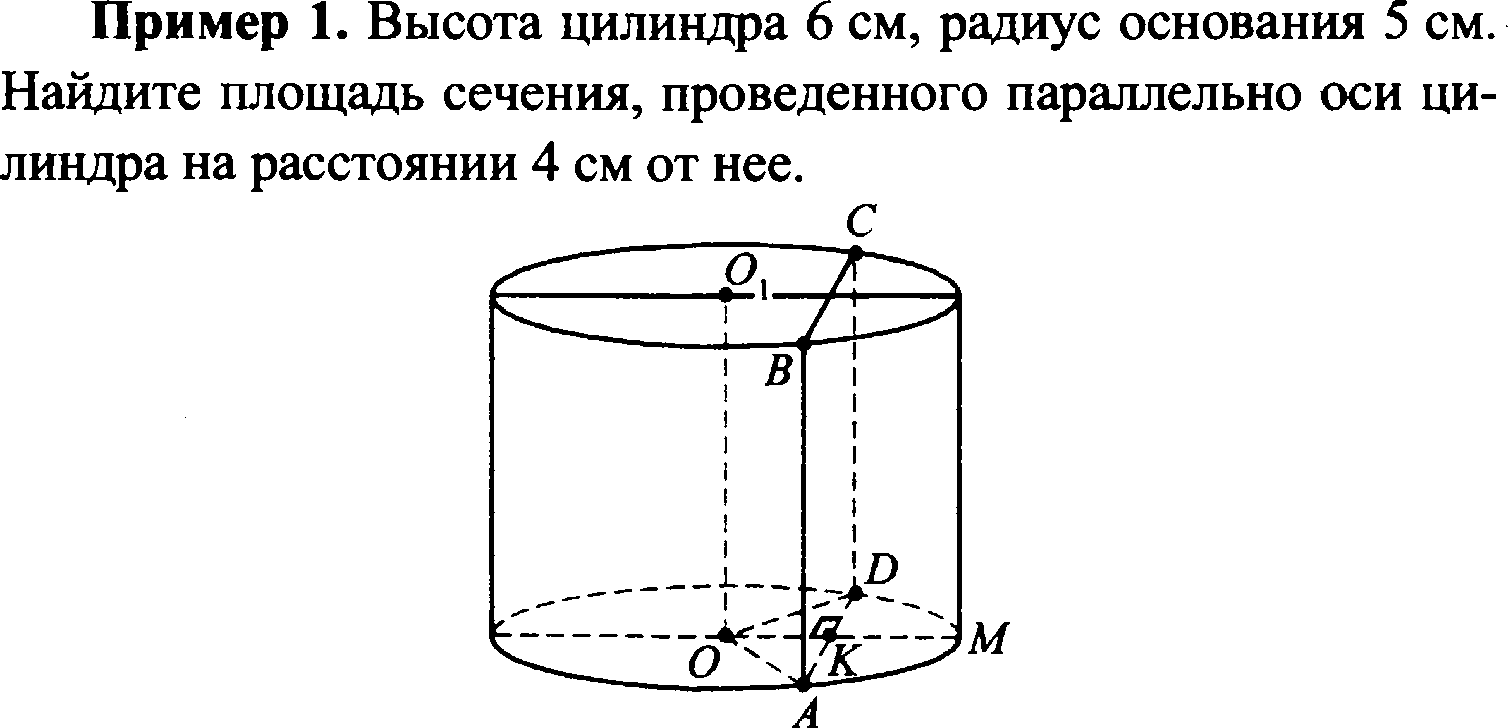
Свойство 1. Образующие любого цилиндра параллельны и равны.

Свойство 2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей боковую поверхность,

Теорема 1. Обьем прямот кругового іділиндра равен *rR h ,*

где Л — радиус основания цилиндра, а *h —* высота іщлиндра.

Теорема 2. Площадь боковой поверхности прямого круго- вого цилиндра равна 2кltb *.*

Теорема 3. Іlлощадь полной поверхности прямого круго- вого цилиндра равна 2пЛ' + 2яfib.

Решенне: В равнобедренном *bAOD ОК , •тэ ОК ——*4 (см). Далее, по теореме Пифагора в YOU:

*АК —— OA — ОК’ ——* 5' — 4' = 3 (см), а *ЛD* ——ШN ——6 (см).

Тогда *ЅлвСD - AD•AB ——* 6-6 = 36 (см2). О т в е т: 36 см2.

Нрнмер 2. Во сколько раз надо увеличить высоту цилинд- ра, не меняя его основание, чтобы объем увеличился в л раз? Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объем увеличился в п раз?

Репіенне: Объем цилиндра равен Г=- fip *h.*

Тогда, если —*V’* = п , то  *S' - h’* = п и *S —— Sz, h —— nhz.*

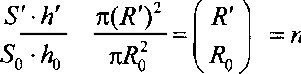
То есть, если не менять основание, то для того, чтобы оfіъем увеличить в в раз, надо высоту іпілиндра увеличить в л раз.

—

Далее, если

г’ = л , и *h’ ——hz,*

0

 , так uтo fi’ = Q .

То есть чтобы при неизменной высоте увеличить объем цилиндра в п раз, надо радиус основания увеличить в раз.

О т в е т: в п раз и в раз.

Прямой круговой конус

О п р е д е л е н и е . *Конус —* это тело, полученное враще- нием прямоугольного треугольника вокруг одного из его кате- тов. Получившийся при вращении круг называется *основани- ем конуса,* общая точка гипотенузы и катета, вокруг которого производилось вращение, — *вершиной конуса.*

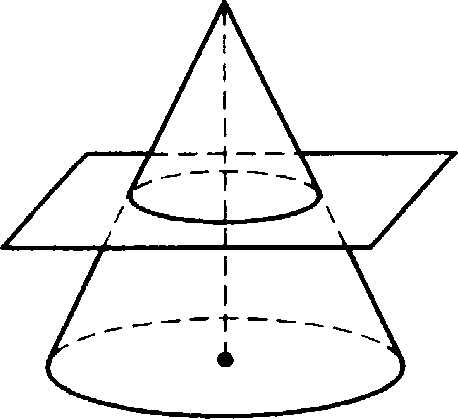
*Высота конуса —* перпендикуляр, опущенный из верши- ны на плоскость основания (т.е. катет исходного треугольни- ка, вокруг которого осуществлялось вращение).

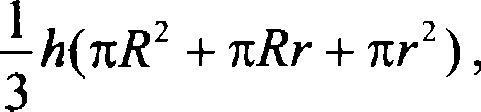
*Осью* прямого кругового конуса называется прямая, co— держащая его высоту.

Теорема. Объем конуса равен одной третьей произведения площади основания на высоту: U = 

Усеченный конус

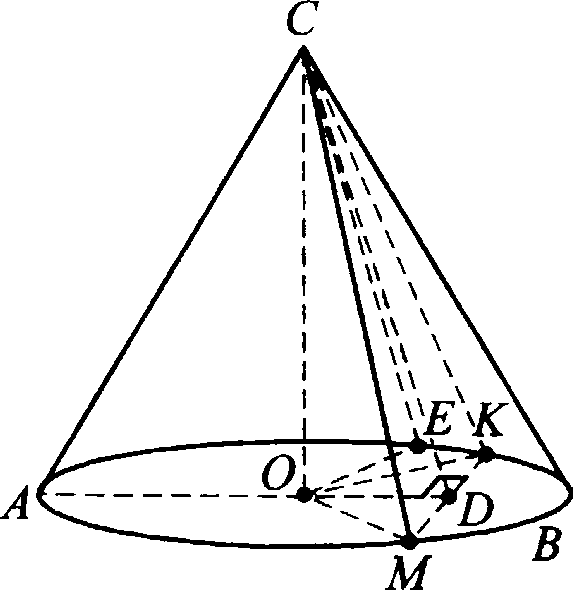
Проведем сечение конуса плоскостью, параллельной осно- ванию.

Нижняя часть конуса называется *усеченным конусом.*

Объем усеченного конуса равен Г = 

*h —* высота усеченного конуса, а Л, *г —* радиусы оснований.

*h —* высота усеченного конуса, а Л, *г —* раднусы оснований. Пример 1. Высота конуса 20, радиус его основания 25.

Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.

Решение: Проведем *OD* в равнобедренном AO . По теореме о трех перпендикулярах *CD* проведем *OELCD* в *bCOD.*

Тогда *ОЕ —* данное расстояние от центра основания кону- са до плоскость *MCK ОЕ ——* 12.

Так что в *bCOD:* sin *ОСй* —— *ОЕ* 12 — 0,6.

*OC* 20

Тогда cos *ZOCE ——* l — sin' *БOC£ —-* —1 30,36 = 0,8.

Так uтo tg *ZOCE ——*

sin *БОСС* 0,6 = 0, 75.

cos *ОС£* 0,8

,f{aлee, *OD —— СО-* tg *ОС£* —— 20- 0,75 = 15,

*CD —— —— OD2 + О’ ——* 15' + 202 = 25.

В dO по теореме Пифагора

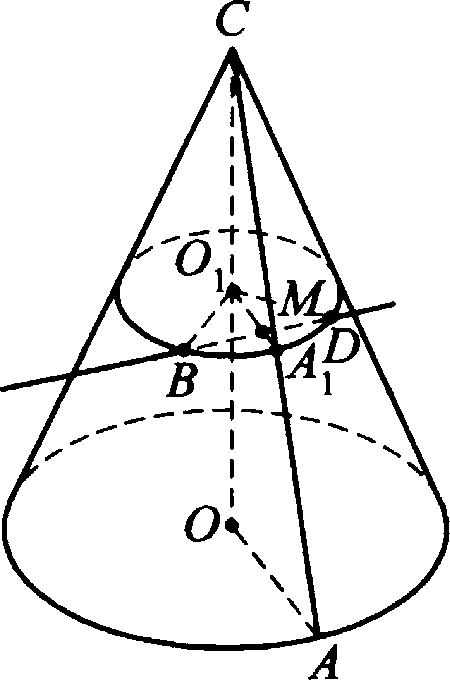
MD = *ОМ - OD2 ——* 25' — 15' = 20,

так uтo = 2 = 40.

 *MK- CD ——* 40 25 = 500.

2 2

О т в е т: 500.

Пример 2. Образующая конуса 13 см, вмсота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию, расстояние от нее до основания равно 6 см, а до выcoтьI — 2 см. Найдите отрезок прямой, заключенный внутри конуса.

**Решение:** Из *bCOA по* теореме Пифагора

*OA —— А - СО’ ——* 13' — 122 — 5.

Проведем плоскость, параллельную основанию и содер- жащую данную прямую *BD.* Тогда проведенная плоскость от- сечет от конуса подоГэный конус.

,f{aлee, dCOiЛ i *- ЬCOA.*

Тогда *о, А, со,*

*OA СО*

т.е. ОіЛ *\_ OA- СО,* 5 (12

*СО* 12

‘) = 2,5 (см).

,f{aлee в A8 OiD проведем *О М D.*

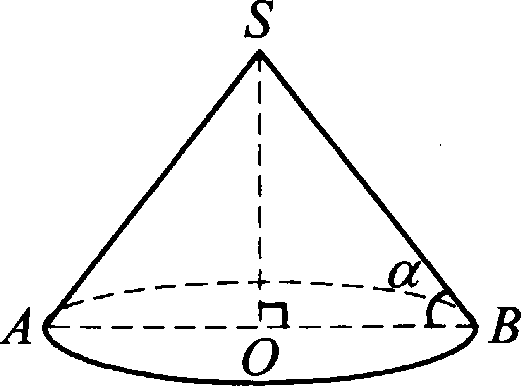
Тогда в прямоугольном *bBO М*

*BM —— ВО, — О,М -—* 2,52— 22 = 1,5 (по теореме Пифагора).

Так что fЮ = 2- *BM ——* 2 1,5 = 3 (см).

О т в е т: 3 см.

Пример 3. Длина образующей конуса равна /, а длина ок- ружности основания — *С.* Найдите объем конуса.

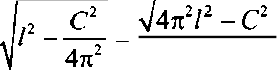


Решенне: Формула для длины окружности

*С* = 2кfi.

Так что *OB —— R —— С*

2z’

Далее в прямоугольном *ЬSBO по* теореме Пифагора полу- чаем:

*SO —— В OB \_— lz \_*

Тогда *V = Sg- h —-* кfi' *50 ——*

3

2z



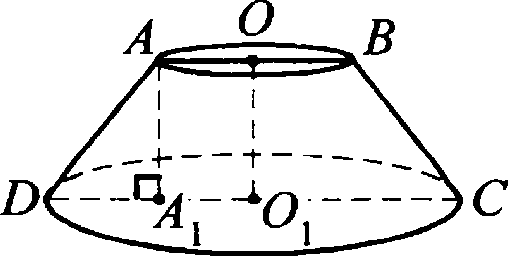
4x' 2x "

243 2

О т в е т

‘

24 32

**Прнмер 4.** Радиусы оснований усеченного конуса Л и *г,* образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем.

**Решение:** Проведем высоту ОО,. Тогда *AOO D —* прямо- угольная трапеция. Проведем W, О,.

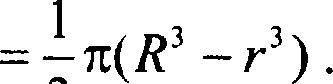
*AOO А —* прямоугольник, так что

*AO —— А О —— г.*

Тогда *DA —— DO — А О —— R — г.*

Далее, в прямоугольном треугольнике *bDAA ШDA* -45°, так что *ZDAA* =90°—ШDА 35°. Поэтому *дDAA —* равно- бедренный и W = *DA —— R — г —— ОО —* высота конуса. Тогда

U — ООО, - (Л2 + Л- *г* + *r 2 )= п R — г ) R’ + Rr* + *г’) —*



О т в е т: U п(Л' — г') \*.

IIIap и ciJiepa

О п р е д е л е н и е . Тело, состоящее из всех точек про- странства, находящихся на расстоянии, не большее заданного от некоторой данной точки, называется *шаром.* Эта точка — *центр шара,* а заданное расстояние *—радиус.*

О п р е д е л е н и е . Граница шара называется *сферой.*

О п р е д е л е н и е . Отрезок, который соединяет две точки сферы и проходит через центр шара, называется *диаметром.*

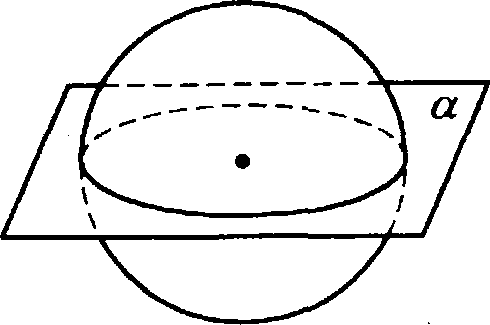
Свойство 1. Любое сечение шара плоскостью есть круг. L(ентром этого круга является основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

О п р е д е л е н и е . flлоскость, которая проходит через центр **шара, называется** *Ьиаметрачьной tиіоскостью.* Сечение ею шара — *боіьшшы кругом,* а **сечение** сферы —— *большой ок- руэісностьт.*



\* Мы получили форму.ау для объема усеченного конуса в том случае, когда его высота равна разности радиусов оснований.





Теорема. Jlкfiaя днаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. L(eнтp шара является его центром

О п р е д е л е н н е . Плоскость, проходящая через тоику Я сферм и перпенднкулярно радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной плоскостью.* Точка Я называется *точкой касания.*

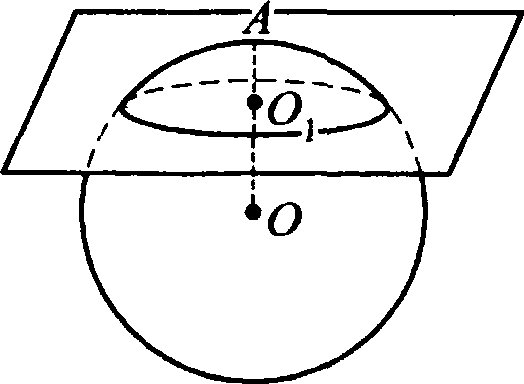
Теорема. Касательная плоскость пересекается с шаром в единственной точке — в точке касания.

Теорема. Линией пересечения двух сфер является окруж-

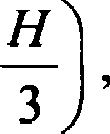
Теореыа. Объем шара равен

4 ,

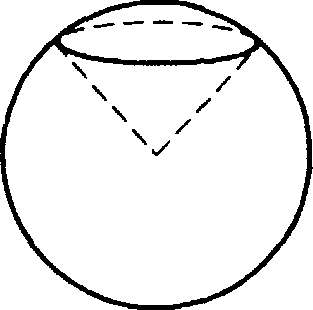
3

О п р е д е л е н и е . *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

*О А —— Н —* высота iuapoвoгo сегмента.

Свойство. Объем шарового сегмента равен nff 2  Л — 

*те Н —* высота шарового сегмеита.

К п р е д е л е н и е . *Шаровым сектором* называется тело, которое получается из шарового сегмеігга и коиуса, основани- ем которого является сечение плоскостью данного шара.

Свойство. Объем шарового сектора равен *М Н*

Теорема. Площадь сферм радиуса Л вычисляется по сле- дующей формуле: S = 4 пЛ' .

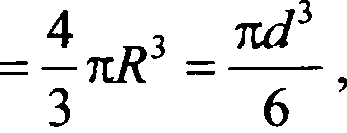
Нример 1. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг.

Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/смЗ).

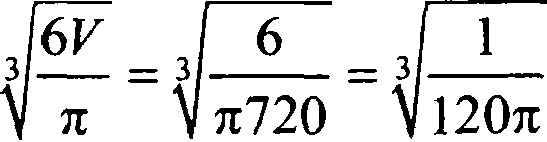
Решенне: Плотность р = 7,2 г/смЗ = 7200 кг/мЗ. Далее, объ-

10 1

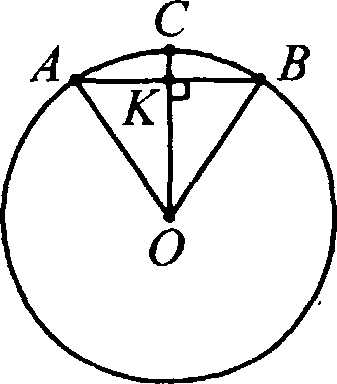


7200 720

Так как U

то *d —g* з = 0,14 (м).

Ответ: 0,14 (м).

**Пример 2.** Чему равен объем шарового сектора, если ра- диус окружности его основания 60 см, а радиус шара 75 см?

Решение: Рассмотрим осевое сечение шара.

В прямоугольном *kOBK OB ——* 75см, JfS = 60 см (по усло- вию).

Т о г д а п о т е о р е м е П и ф а г о р а

*ОК -- OB — BK’ -—* 75' — 60' = 45 (см).

Так что высота iuapoвoro сегмента *CK —- СО - ОК ——* 75 —

— 45 = 30.

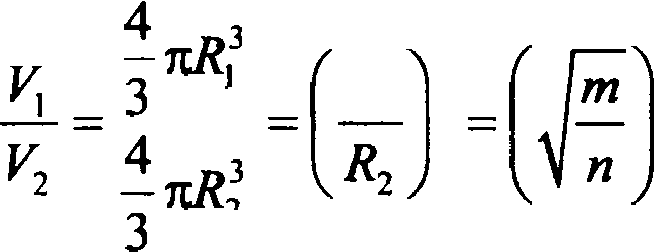
И объем одного сегнента:

*= —<со' -кс* 2 75' 30 = 112 500a = 112,5a (дм').

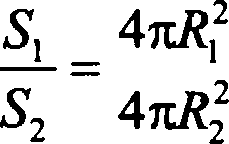
О т в е т: 112,5 п дм'.

Нрнмер 3. flлощади поверхностей двух шаров относятся как *т:п.* Как относятся их объемы?

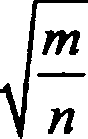
Решенне: flлощадь поверхности шара выяисляется по формуле *S ——* 4яfi2.

Тогда, еслн

*m *

=—, то

*т*

— , **ТЯК HTO**



l

О т в е т:

*т т ›*

**5.8. Комбннацнн многогранников и тел вращения**

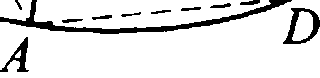
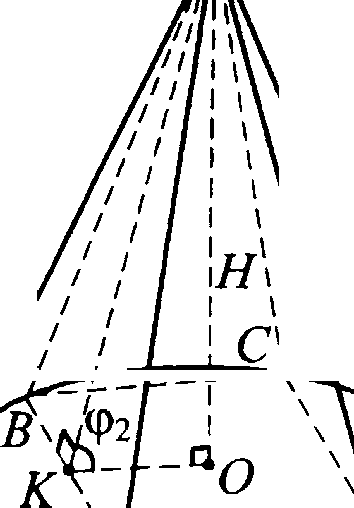
Прнмер 1. В конус вписана пирамида, основанием кото- рой является прямоугольник. Меньшая сторона прямоуголь- ника равна *А,* а острый угол между его днагоналями равен ‹ра Боковая грань, содержащая меньиіуіо сторону основания, со- ставляет с плоскостью основания двугранный угол ‹р, . Най-

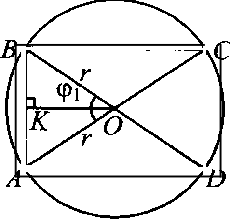
дите объем конуса.

Решение: Пусть *PO —* высота конуса, *PO —— Н, AB < AD.*

Построим *ОК L AB.*

По теореме о трех перпендикулярах *PK* перпендикулярен *AB.*

*PO ——* tg‹p„ *H OK OK*

= tg‹p„

*H ——OA-tg's2.*

B OCHOBau nripauripsi:

*AB —— a, BO —— OD —— AO —— OC —* no caoiicvny ri aro amen

npzMOyronsH xa, *BO —— R.*

B zpeyrons xe *ABO:*

*C BO —— CBAO ——* 180º — 'il 90º —

2 2

flo Teopeue c ycoB sanuiueu:

*a R*

sin f{I sin(90° — ’2 )

ri - sin(90° —



) *a*- **COS** —

2

 sin - cos

2 2

2 sin

2

Ha rpeyrons xa *BKO:*

*OK ——*

COS2'

2 2 sin 1

2

d’COS—

N = *OK* tg‹p2= 2 tg =

2 - sin’ 1

2



2tg ’ 1

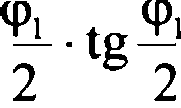
2

*Y xOH'*

3 3

4sin' 2

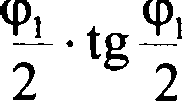
\_ w' twg

24 sin 2 

O T B e T: =' t

g•

2tg 2

24 sin 2

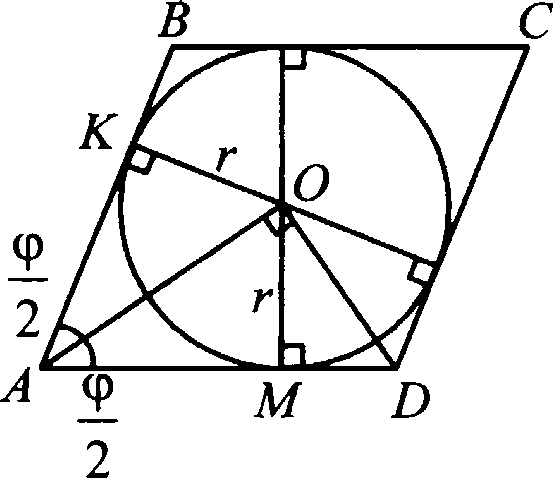
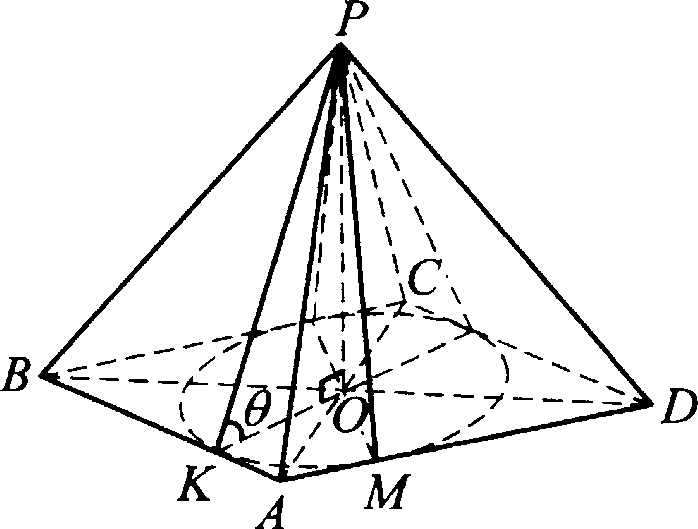
**Hpuuep 2.** Oc oBa **HeM** nupauxpsi sansezcs pou6 co **CTO-**

**]3OHO(i** A H **OCTQbIM WHOM t§** . B nHpaMripy Bniica xoriyc, o6pa-

3yioIuO3I KOToporo cocTaBnxez c nnocxOCTsio ociioBaxris yron 8 .

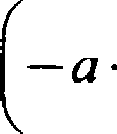
Haiip Te o6reu xouyca.

Peuieuue: flyers *PO —* Bsicoza niipauuqol, O6oaHauHM *PO —— H. PK —* o6paaymulax xoriyca, xoTOpas men rr B rinOcxocvu *APB, OK L AB.*



B **OCiioBaHiiH** nripaMiiflsi paccuOzpHM:

*ABCD —* **]3OM6,** *AB —— a.*

1

*S ABCD —* 4J *OD* — *2 J z BC• ABCD — 2*

-*a* sin ‹p — n2

sin‹p;

2

1. *-ADDOM ——* I *ar.*

2

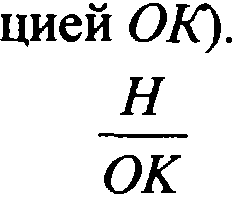
Hp iiin x ypaaiie **iim:**

n2 sin‹p = 4- *ar,* oTxypa *r ——* a sin‹p.

2 2



**OOH, KOTO siii** o6pasymiuas xoriyca PK cocTaBnxez c ee npoex-

= tg8, H = *r-tg8* =

a-sin‹p-tg8. U = l

2 3

 a- sin‹p

tg8=

3 . 3

StII t[f

-tg8.

3 4 2 24

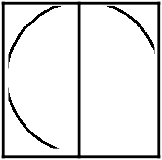
OrzeT: 24

SlÖ Ï{I tg0.

Hpauep 3. B iI uiiunp anuca map. Haiiu re ovuouieu e

o6aeMOB uun rinpa iuapa.

**Peuieuue:** PaccMOzp M oceaoe ceueu e.

*B C*

*r*

*A D*

Hycrs czopoua xaaopara paø a x, cnepoBaTens o panuyc uta-

h

pa *r* —— 2 .

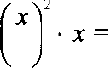
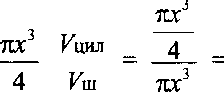
3 3 2 3 -4 2 6

170

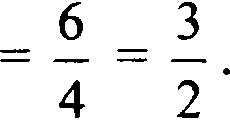
Радиус основания цилиндра равен

*х* высота цилиндра

2’

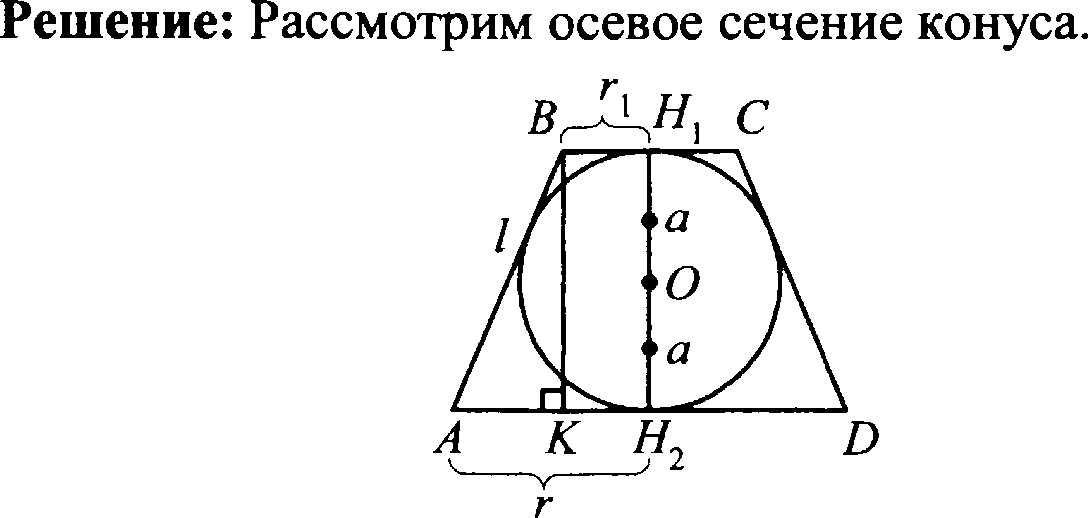
равна *х,* следовательно Г = п

2

б

О т в е т: 3

2’

Нрнмер 4. В усеченный конус, радиусы оснований кото- poro равны г и п, вписан шар. Найдите отношение объемов усеченного конуса и шара.

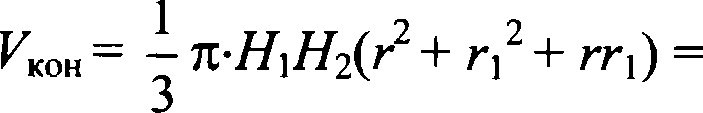
ff i , ff 2 — центры оснований, *ABCD —* сечение, которое является равнобедренной трапецией.

*Bff* —— *• АН 2 •*

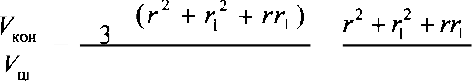
Обозначим радиус вписанного шара *а.*

U = 4 *па’.*

з

Высота конуса есть диаметр шара, *Hi ff 2* = 2a.

2a(r2 + п' + =і .

1. *па*

4 р z ' 2а 2

з

ОІТНСіЗННОМ **JIT•HHKe** С МЫ ІТQОТНВОНОЛОЯО-ІТ•ІХ **GTOQOH**

равны.

*BC + AD —— AB + CD —— ТВ.*

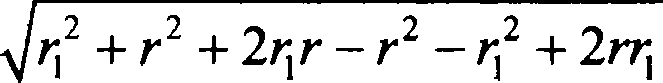
Обозначим *AB —— 1,* следовательно 2r + 2r = 2/, f = *п + г.*

Построим BK перпенднкулярно *AD.*

*АК —— г — п, BK —— ИЕН ——* 2a.

Из прямоугольного треугольника *ABK:*

2a = ' *— АК’ —— (г, + г) — (г - г,) ——*

 = 4 *——* 2 , *, а —- mr .*

Подставляя выражение для а в формулу (1), получаем:

*Vp* 2гг,

*г’ + г,’ + rr,*

О т в е т:



2гг,

1. **ЭЛЕМЕНТЫ КОМБПНАТОРИКИ,**

СТАТИСТИІІИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

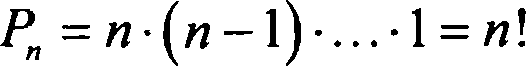
Элементы комбннаторнки

*Иоочередный выбор* (т.е. выбор с учетом порядка)

Пусть из общего количества п объектов необходимо ото- брать гpyппy из *т* объектов с *учетом порядка их с.sедования.* Каждый способ выбора этих объектов называется *размещени- eгw без повторения.* Количество различных способов такого выбора:

*А“* = *п -(п —* I)*- . . . -(п —(т* — i)) — п!

*(п — т)!*

В частности, если *т —— п* и подобный выбор идеіггичен pac- положению п объектов в определенном порядке следования друг за другом, то способы такого расположения называются *перестановкаwи* и общее число перестановок равно:

Ї **CTh TOHC'•]3h** П — **KOJIIP4GCTBO ]3B3HIPDII›IX BHQOB О()Ъ KTOB,** И

нам нужно оюбрать *т* объектов *с учетом порядка их следования,* при этом объект каждого вида можно испольювать несколько раз. Такие способы выбора называіотся *размеирниями с повто- рениями,* и их количество равно:

п’

*Одновременный выбор* (т.е. выбор без учета порядка) Пусть из общего количества п объектов необходимо ото-

брать rpyппy из m объектов *без учета порядка их следования.* Каждый способ выбора этих объектов называется *соvетанием.* Количество различных способов такого выбора:

 п!

*т!(n -* т)! *‘*

*Бино.я Ньютона.*

*ја + b)" ——С’а“ + C'a“"b +--- + Ck a“ ’Ь’ + - - -+ С"b“*

Числа сочетаний *C’* называют также *биномитіини и ко- оффициентани.*

17]

Злемеяты теорив вероятностей

Событие, являющееся результатом некоторого испьггания (эксперимента), которое при выполнении некоторого набора условий может как произойти, так и не произойти, называется *случайным событием* (обычно обозначаются латинскими бук- вами *А, В, С,... ).* Событие, которое в результате испытания

наступит обязательно, называют *достоверным* (обозначается i ); событие, которое никогда не может наступить невоз- *можным* (обозначается В ).

*Сумма* событий *А* и *В* это событие

*С —— А+ В ——* (произойдет хотя бы одно из событий *А; В*

*Произведение* событий *А* и *В* это событие

*С —— А - В -—* пронзон;цж н событие *А* и событие *В .*

Событие А ——(событие *А* не произойдет$ Называется *npo-*

тквополоwньья событию *А.*

События *А н В* называются *несовместньиии,* если в данном испытании они не могут наступить одновременно, т.е. *А - В ——Ф .*

События *А* и *В* называются незавпсимьшк, если наступле- ние одного из них в данном испытании никак не влияет на настугіление другого. В противоположном случае собьггия на- зываются *зависимыми.*

Вероятность — это числовая характеристика степени объ- ективной возможности наступления данного события.

*Классическое определение вероятность.* Пусть достовер- ное событие Ci = *А, + + ...+ А ,* где *А; i ——*1,2,.. *.п)* — эле-

ментарные, равновозможные и попарно несовместные собы- тия. Тогда вероятность события *А* равна отношению числа m элеменzарных событий, благоприятствующих событию *А, к* числу п всех равновозможных элементарных событий:

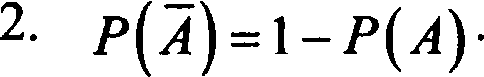
*Р А) ——*

*Теорема сложения вероятностей*

*Р(А+ В) -— Р(А)+ Р(В)- Р(AB).*

В частности,

1. если *А н В иесовые‹::vиые* события, то

*Р(А+ В) -- Р(А)+ Р(В) ,*

*Теорема умножения вероятностей*

*Р(AB) -— Р(А) Р В А) ——Р(В) Р(А В)*

*те p( A\ B) —* вероятность события Л , найденная при yc-

ловии того, uтo событие *В yne* наступило (так называемая *yc- ловная вероятность).*

В частности, если события *А н В* независимы, то

*Р(AB) ——Р(А) Р(В) .*

175