**СПРАВОЧНИК**

1. *Некоторые признаки делимости натуральных чисел Натуральные числа —* это числа, используемые для счёта:

1, 2, 3, ..., п,

Натуральные числа образуют множество, называемое *множеством натуральных чисел.* Множество всех натуральных чисел обозначается символом N: N= 1, 2,3,...,п,...).

*Признак делимости на 2.* Число делится на 2, если его последняя цифра есть число чётное или ноль.

*Признак делимости на 4.* Число делится на 4, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

*Признак делимости на 8.* Число делится на 8, если три его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

*Признак делимости на 3 и 9.* Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

*Признак делимости на 5.* Число делится на 5, если оно оканчивается либо на ноль, либо на 5.

*Признак делимости на 25.* Число делится на 25, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 25.

*Признак делимости на 11.* Число делится на 11, если у него сумма цифр, занимающих чётные места, либо равна сумме цифр, занимающих нечётные места, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

## *Свойства степени с целым показателем*

*Степень с натуральных показателем а" ——а - а - .-.. (а —* основание степени, п показатель степени).

*Степень с целым показателем ak , k е Z :*

*а, n е* N

1. если k = п, u W , то *ak* = *а‘ = -а*

*... - а,*

1. если k = —п , п о N, ‹г П = , например, 2°3 1

2’

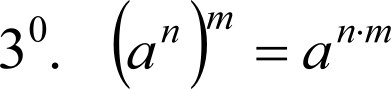
1. если k = 0, то по определению n0 = 1.

10. *а- at П+* при перемножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются.

2s. ‘р = *а"°‘ —* при делении степеней с одинаковым основанием из

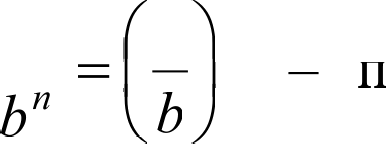
показателя числителя вычитается показатель знаменателя.

4

 при возведении степени в степень показатели перемножаются.

1. *а-‘ bn ——(-а b)‘ —* при перемножении степеней с одинаковым

показателем основания перемножаются.

5 0. *а а*

ри делении степеней с одинаковым показателем

основание числителя делится на основание знаменателя.

*3.Формулы сокращенного умножения*

*а + b) 2 —— a 2 +* 2аЬ *+ b2*

*а — b)’ ——a2 —* 2пЬ + *b2*

*a2 — b2 —— а — b) а + b)*

*а+ b)’ ——а’ +* 3а 2 Ь *+* 3пЬ2 + *b’ а — b)’ ——а’* — 3п2 Ь + 3пЬ2 — b'

(квадрат суммы); (квадрат разности); (разность квадратов); (куб суммы);

(куб разности);

*а’ + b’ —— а+ b)g(*

*2 ab+ b2)*

(сумма кубов);

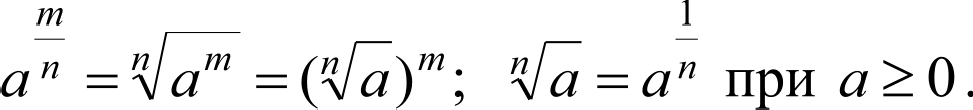
*а’ — b’ —— а — b)( a2 + ab+ b’)*

(разность кубов).

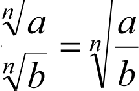
* 1. *Свойства арифметического корня*

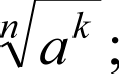
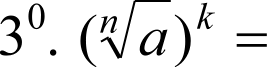
Действие, обратное возведению в натуральную степень, называется *извлечением корня.* С помощью этого действия по данной степени и её показателю ищется основание степени. *Извлечь корень cтeneни п* из числа *а —* это значит найти такое число х, которое после возведения в степень п даёт само число ‹г.

Неотрицательное значение корня чётной степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем.*

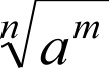
*Степень с дробным показателем а"* определяется как *at ,* то есть

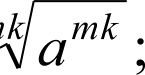
lo. *дa- ЛЬ — ab’,*

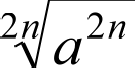
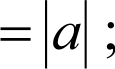
2 0. 



4o. *дa ——‘ka ’,*

  *пk mk*

60. *дa —— а ја* > 0);

70.  

8o. *"+ а ———"+ ја* 0);

* 1. *КваЬратное уравнение. Формула Виета*

*Уравнение —* это равенство, справедливое при определенных значениях входящих в него переменных.

*ах + bx + с ——*0, *а* 0 — квадратное уравнение.

x2 + *px+ q ——*0 — приведённое квадратное уравнение.

*D ——b2 —* 43c дискриминант квадратного трехчлена.

Если *D* 0, то квадратное уравнение имеет корни, причем при *D* > 0

ДВі1 ]ЗdЗЛИЧНЫХ КО]ЗНЯ У —

*— b+ CD*

И Xj — *— b — CD* ; П]Эи *D* ——0 — равные

# 2п 2п

корни (один корень) *х —— х — b .* Если *D* < 0, то уравнение не имеет действительных корней.

Для корней квадратного уравнения справедливы равенства — формулы

Виета:



*Разложение квадратного трехчлена на множители:*

*ах2 + bx+ с —— а(х —* х )(х — *x2 ) ,*

где z и х — корни уравнения пг2 + *bx + с ——* 0.

## *График квадратичной функции*

Функция J(x)= яг' + *bx + с* называется квадратичной. Здесь *а , b , с* фиксированные действительные числа, причём п z 0, а z принимает любые действительные значения. График квадратичной функции называют

параболой.

График квадратичной функции J(x)= лг' + *bx+ с* имеет вид:

а) при п > 0, *D <* 0 парабола лежит выше оси Oн (следовательно, не имеет общих точек с осью Oн ) (рис. 1);

6) при п > 0, *D* ——0 парабола касается сверху оси *Ох* в точке

-0 1 = =2 ( рИс. 2);

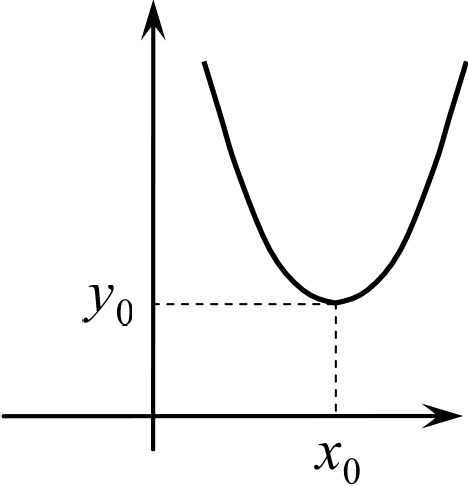
в) при п > 0, *D* > 0 парабола пересекает ось *Ох* в двух точках *х* и х (рис. 3);

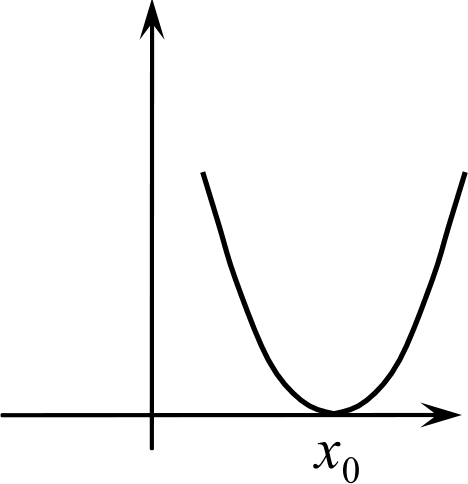
г) при п < 0, *D <* 0 парабола лежит ниже оси *Ох* (следовательно, не имеет общих точек с осью Oн) (рис. 4);

д) при п < 0, *D* ——0 парабола касается снизу оси *Ох* в точке

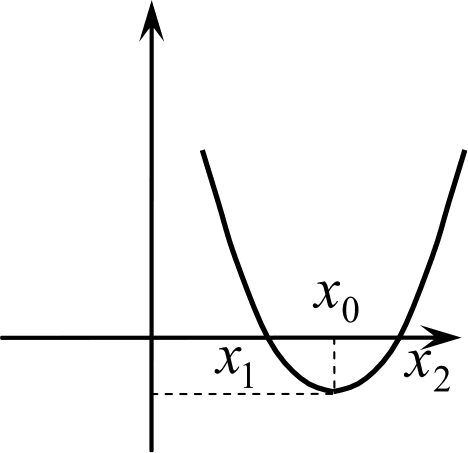
= = *х ——•2* ( рис. 5);

е) при ‹г < 0, *D* > 0 парабола пересекает ось Oн в двух точках z и х, (рис. 6).

Рис. 1

Рис. 2

›'

Рис. 3

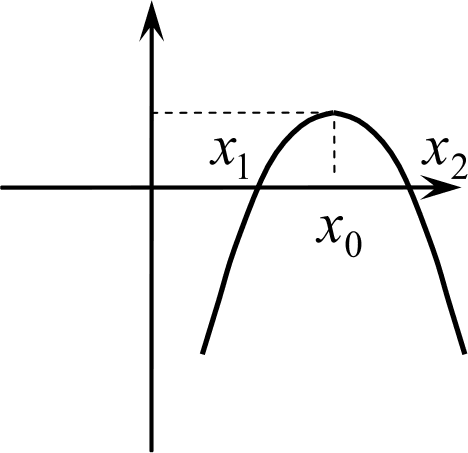
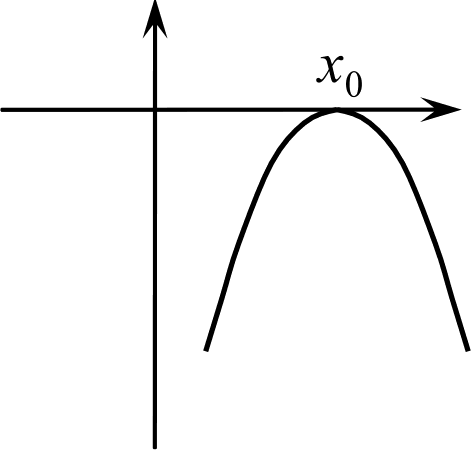
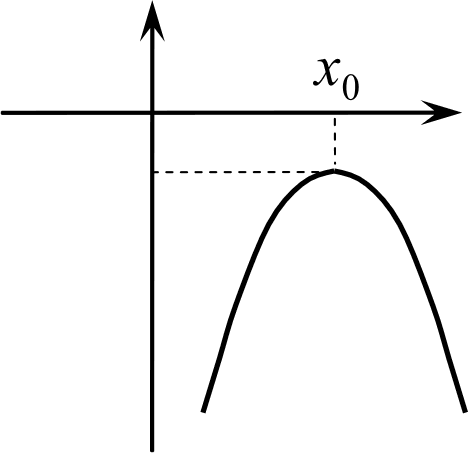
10

Рис. 4

Рис. 5

›'

Рис. 6

## *Рациональные корнн многочлена с целыми коэффициентамн*

Выражение вида *F х) ——*п0х" + • =п i+ ° ..+ *as—i\* +‘n›* где *at ,at ,... ,а —*

целые числа, п z 0, п натуральное число, *х* некоторый символ, называется *многочленом степени п с целыми коэффициентами от переменной х.*

Число с называется *корнем многочлена F х),* если *F(с) ——*0.

Справедливо следующее утверждение: если несократимая дробь *"—*

является корнем многочлена *F х),* то *р* делитель свободного члена no , а q — делитель старшего коэффициента п . В частности, при no = 1 рациональные корни многочлена будут целыми числами. (В качестве иллюстрации можно вспомнить теорему Виета о корнях приведенного квадратного уравнения.) Следовательно, если мы хотим найти рациональные корни уравнения х‘ + ‹г x‘°1 + *а2 х °’ +- +* •.— = + п, ——0, то достаточно

проверить все делители числа *а* (как положительные, так и отрицательные).

* 1. *Рациональные неравенства. Метод интервалов*

Неравенства, которые можно привести к виду *~~' '~~* 0, где *Р х)* и

*Q(x) -* некоторые многочлены, *Q х) —* не тождественный нуль, — один из знаков >,<,й,й, называются *рациональными неравенствами.*

При решении рациональных неравенств удобно пользоваться

следующими утверждениями:

1. Неравенство*~~' '~~* > 0 равносильно неравенству *Р х-) Q1*

*Q х)* > 0.

1. Неравенство*~~'~~  <* 0 равносильно неравенству *Р х) - Q(x)<* 0.
2. Неравенство
3. Неравенство



*Q х)*



0 равносильно системе 

0 равносильно системе



*Q х) z* 0.

*“ Q \*1 —<*0

*Q х) Q х) z* 0.

Пусть *F х) —* некоторый многочлен степени в . Возможны два случая разложения этого многочлена на множители.

1. *случай. F(z)* ——п (х п *)k* (х *а )k’ ...(x* п \_ *)k'—1* (х *а )k' ,* где

# п , п , ... , *а* действительные числа, \* .\*2.---7• — натуральные числа,

Пусть п < •2 < ..< п \_ < п . Изобразим эти точки на числовой прямой, получим / + 1 промежутков. Расставим знаки «+» или «—» в каждом промежутке по следующему правилу: справа от самой правой точки ставят знак коэффициента п . Затем, двигаясь справа налево, при переходе через

точку *а,* меняют знак, если число *k,* нечётное , и оставляют тот же знак, если оно четное. В качестве решения неравенства *F х)* 0 берут объединение

промежутков с подходящими знаками. Если неравенство строгое, то концы промежутков в ответ не входят, а если нестрогое, то входят.

1. *случай.*

*F х) ——*по(= •і)-"

-(= *at)k' b x2 +* cix *+ dc ...b x2 + ccx+ dc “ ,* где

п ,п *,...,a ,be ,*cc, *dc,.. i' .• р ,dp —* действительные числа, *k* ,...+ .• . --л. —

натуральные числа, *k* + ...+ k + 2s + ...+ 2sp = п и каждый из квадратных

трёхчленов *b,х’ + с,х + d,* имеет отрицательный дискриминант. Тогда неравенство *F х)* 0 равносильно неравенству

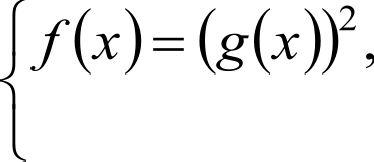
п *bs'* .. бр‘ (х *а )kl .. .(x а )k'* 0,

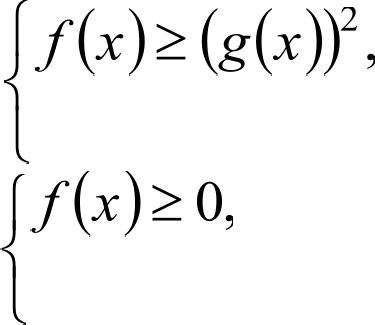
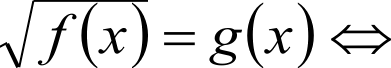
поскольку квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом имеет

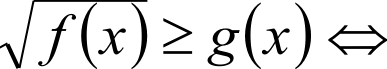
постоянный знак, совпадающий со знаком старшего коэффициента.

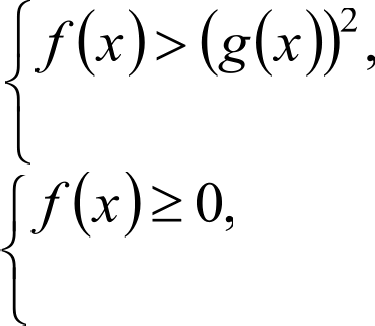
* 1. *Иррациональные уравнения и неравенства*

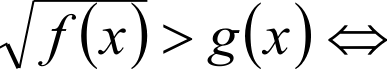
*Иррациональное уравнение (неравенство) —* это уравнение (соответственно, неравенство), содержащее радикалы.

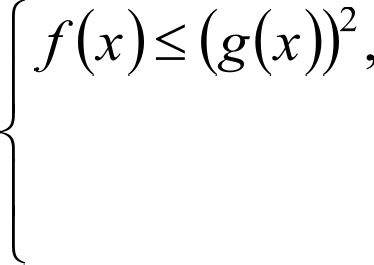
При решении иррациональных уравнений и неравенств можно применять следующие эквивалентности:

*g(x)* 0.

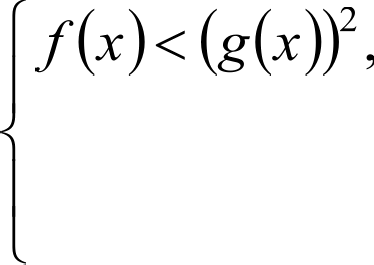
*g(x)* 0;

*g(x)<* 0.

*g(x)* 0;

*g(x)<* 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *f(х) < g(x)* | *f(х)* | 0, |
|  | *g(x)* | 0. |
| *f(х) < g(x)* | *f(х)* | 0, |
|  | *g(x)* | 0. |

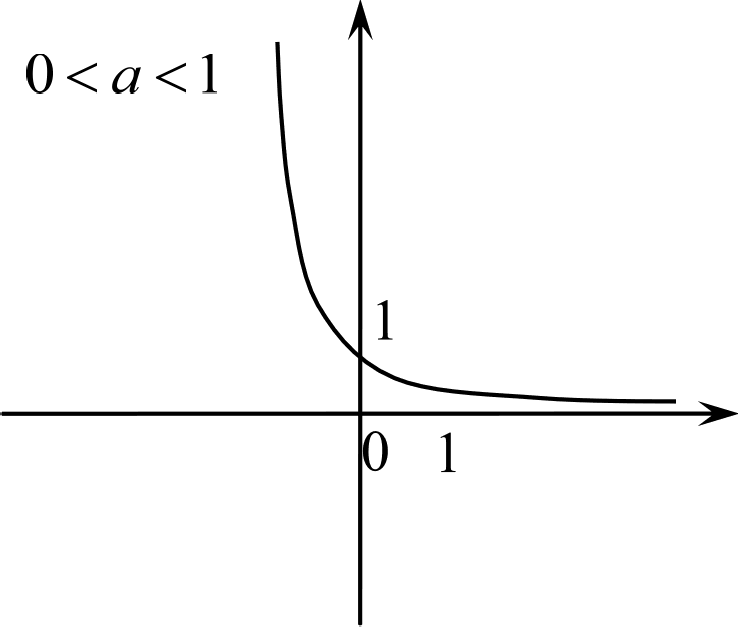
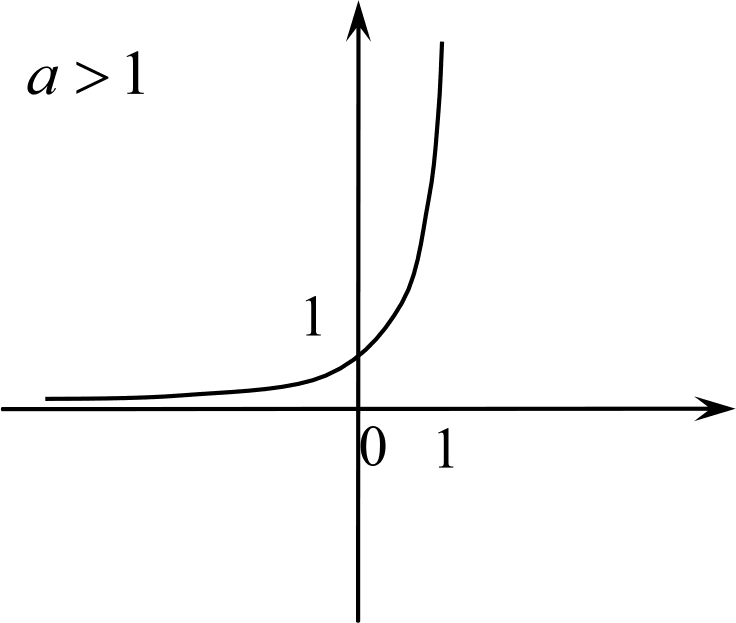
* 1. *Моказательная функция*

Функция вида *у = а‘,* где *а —* постоянное положительное число, не равное единице, называется *показательной.*

Перечислим основные свойства этой функции.

1. Функция задана на всей числовой прямой R .
2. При любом положительном основании п0 = 1. Следовательно, все графики показательной функции пересекают ось ординат в одной и той же точке (0;l) .
3. Функция является возрастающей при *а* > 1 и убывающей при 0 < п < 1. Причём, если п > 1, то п° < 1 при х < 0 и п° > 1 при х > 0 ; если 0 < п < 1, то *а"* > 1 при х < 0 и п° < 1 при х > 0.
4. Непрерывна на всей числовой прямой R .
5. Множеством значений функции у = *а‘* является интервал (0;+m). Таким образом, показательная функция положительна при любом значении аргумента *х* (график расположен выше оси Oн).

*График показательной функции* имеет вид:



## *Понятия логарифма и основные его свойства.*

*Погарифмическая функция*

Пусть дано уравнение п‘ = *b ,* где п > 0, *b* > 0 и п z 1.

*Логарифмов числа b по основанию а* называется показатель степени с, в которую надо возвести данное основание *а,* чтобы получить число *Ь.* Запись log *b ——с* читается так: логарифм числа *b* по основанию *а* равен с.

*Основные свойства логарифма*

Пусть п > 0, ‹г 1, *b* > 0, с > 0, *d* > 0, m с R , ф е R .

1. log *a* 1 = 0 (логарифм единицы равен нулю).
2. log *a а ——*1 (логарифм основания равен единице).
3. lo *b ——b* (основное логарифмическое тождество).
4. *1og a (b* с) ——log *b+* logq с (логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел при том же основании).

*Замечание.* В общем случае приведённое выше правило формулируется так: логарифм произведения нескольких чисел, если оно положительно, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, то есть

'g п *‘1* - *’2 - . . . - l9 р* — 'g п *‘1* + 'g п *‘2* + . . . + IOД*р IрN*

*‘1* ‘ *‘2* - . .-.

*’п* > () .

1. log *а ——*log *а b —* log *а* с (логарифм частного положительных чисел

равен разности логарифмов этих чисел при том же основании).

*Замечание.* Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, то есть

log b ——log b log с ,  0.

1. log, *b‘* — mlog, *b* (логарифм степени равен произведению логарифма основания этой степени на её показатель).

*Замечание.* Логарифм четной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля ее основания, взятый по тому же основанию, то есть

log b2‘ = 2п log b , *п е Z .*

1. log b ———log b, m z 0.

°‘ о

1. "'п‘*“* logq *b, а* 0.

9 IOQ *а b’* lO *а b* • 0

log b

1. log *a b ——* log, п

с z 1 (формула перехода к новому основанию).

1. lOфр *b ——*  1 *, b* 1 (частный случай формулы перехода к новому

log *а*

основанию).

1. logq с loД, *ь* Н ——logq Н - Ioј *ь у b Й* 1.

› . lo *b • ь lощ а*

1. Ig *b —* общепринятое написание выражения log, *b* (десятичный логарифм); *b —* общепринятое написание выражения log *b* (натуральный логарифм), где число е 2,72.

Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется операцией *логарифмирования.* Нахождение числа *b по* заданному значению log *a b* называется *потенцированием.*

Функция вида у = log a х, где п положительное число, не равное

единице, называется *логарифмической* (таким образом, логарифмическая функция является обратной к показательной функции).

Перечислим основные свойства этой функции.

1. Функция задана на интервале (0;+m) (график расположен справа от оси Оу).
2. При любом положительном основании log 1 = 0. Следовательно,

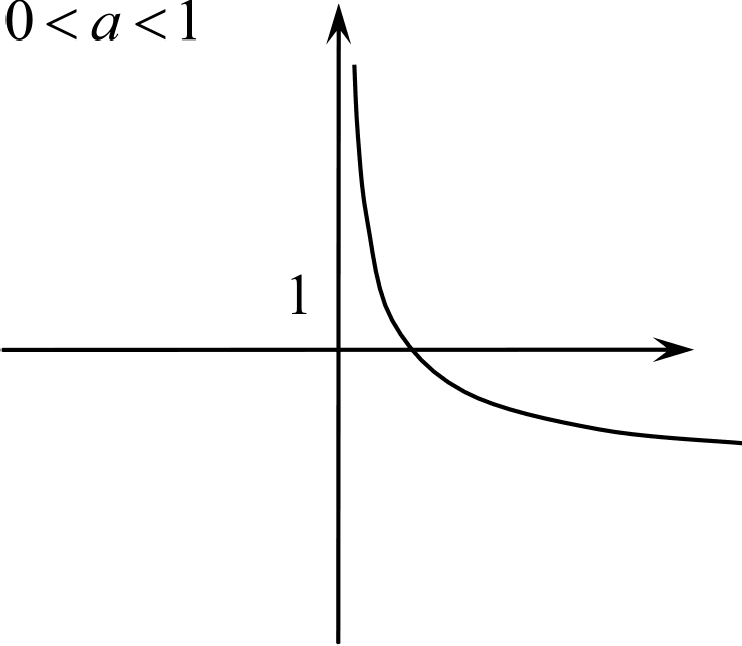
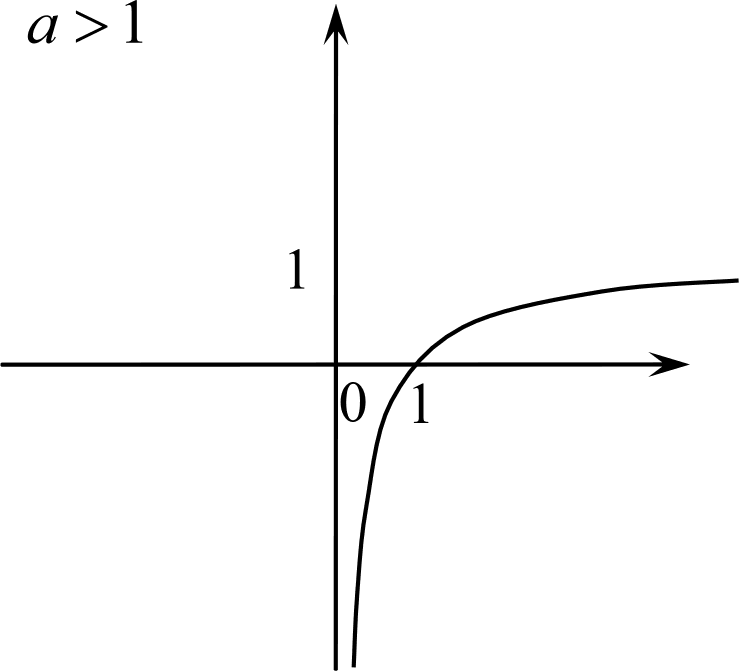
г афик логарифмической функции пересекает ось абсцисс в точке 1;0) при любом *а* > 0, п 1.

1. Функция является возрастающей при п > 1 и убывающей при 0 < п < 1. Причём, если п > 1, то log х < 0 при 0 < х < 1 и logg х > 0 при х > 1; если 0 < ‹г < 1, то logg х > 0 при 0 < х < 1 и 1og a х < 0 при

> 1.

1. Непрерывна на всей области определения (0;+m).
2. Множеством значений функции *у =* log *a х* является интервал то есть логарифмическая функция принимает все

действительные значения.

*График логарифмической функции* имеет вид:

0 1

* 1. *Некоторые тригонометрические формулы*



sin(‹r + Д) = sin‹rcosД + sin Дcosm . sin(‹r — Д) = sin mcosД — sin Дcosm . cos(n + Д) = cosn cosД — sin nsin Д. cos(л — Д) = cos‹rcosД + sin лsinД. sin 2s = 2sin ocos‹r .

cos2m = cos' о — sin 2 m ; cos2m = 1 — 2 sin 2 ‹г; cos 2s = 2 cos2 m — 1 .

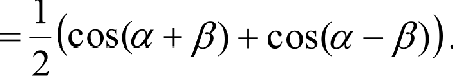
1

SШDCOS

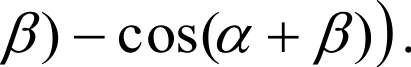
GOSDGOS



2



# 1

— COS 4 — 

# 2

sin x + sin y = 2sin ~~+~~ cos

2 2

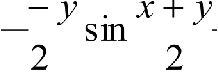
så *x —* sin y = 2sin

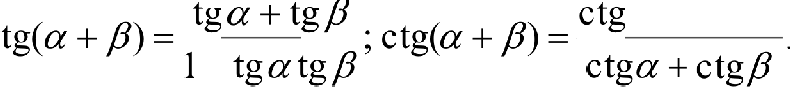
cos ~~+~~

2 2

cosa + cosa = 2cos ~~+~~ cos

2 2

cosa — cosa = —2sin 

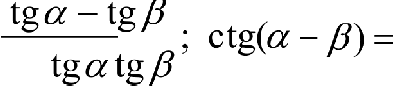
o ctgQ — 1

1 +

tg2‹r = 2tg‹r

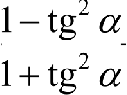
I — tg' o

c'g°ctgp + i

ctgo — ctgQ

ctg2o = —1

2ctgm

sin 2s = 2tg‹r , cos2o =

# 1+ tg' m

* 1. *Hpocmeiimue mpuzouomempu•iecuue ypaaueuu»*

p x = (— 1)" arcsinn + w, *n z Z,* ecuri m 1,

HeT peiueriiiii, ecn o > 1.

GOSX=‹7

x = + arccos n + 2s, u c Z, ecnH Ø 1, Her peiueiiriii, ecuH Ø > 1.

tgx = *a x ——*arctgn + m, *n z Z.*

# ctgx = ‹re x = arcctg‹r + m, u c Z.

## *Anzopumm pemeuu npocmeiimux mpuzouomempuvecuux uepaceucma*

 YCTHo saMeHseM HepaBeHcTBo ypaBHeHHeM. UepTHM epHHHuHyio oKpymHoCTs H oTMeuaeM Ha Heri TOUKH, GOoTBeTcTBym He ypaBHeHHio.

* + 1. OTMeuaeu TouxH oKpymHoCTH, GOoTBeTcTByio He HepaBeHcTBy, T. e.

BI.IpeuxeM cooTBeTcTBym yio pyry.

* + 1. KiI3sIBaeM HanpaBueHHe oTcueTa.
    2. HaxopHM Hauauo pyrH H yron, eMy cooTBeTcTByiouiH .
    3. HaxopHM On, cOoTBeTcTByioiuHH xoHuy pyrH.
    4. 3flHHChIBaeM oTBeT B BHpe npoMewyTKa c yueToM nepHopHuHOCTH

QyHnuHH.