

Справочные материалы для учащихся 9 класса.

*Алгебра*

Натуральные числа и действия над ними

Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не определяется через другие, более простые понятия. Натуральные числа возникли в результате счета предметов. Их можно записывать как ряд чисел: 1, 2, 3,...Обозначается множество натуральных чисел N.

Для натуральных чисел определены действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, причем сложение и умножение выполняются всегда.

Результат сложения двух или нескольких чисел называется их суммой, а сами числа — слагаемыми: а + b + с + + k = р, где р — сумма; а, b, с,...k — слагаемые.

*Законы.*

1. а + b = b + а — переместительный, коммутативный; а b = b а
2. (а + b) + с = а + (b + с) — сочетательный, ассоциативный; (а b) с= а (b с)
3. (а + b) с = а с + b с — распределительный, дистрибутивный. с (а + b) = с а + с b

*Вычесть из числа а число b —* значит найти такое число х, которое в сумме с числом b дает число а, т.е. а b = х, если b + х = а, где х — разность а и b и обозначается а - b, а — уменьшаемое, b - вычитаемое.

*Разделить число а на число b —* значит найти х, при умножении которого на число b получается а, т.е. а : b = х, если х b = а, где а — делимое, b — делитель числа а, х — частное.

Число, которое делится на 2, называется *четным.*

Число, которое не делится на 2, называется *нечетным.* *Признаки делимости чисел.*

Ј. На 2 делятся все те, и только те числа, у которых в разряде единиц четное число.

На 5 делятся все те, и только те числа, у которых цифра единиц 0 или 5.

1. На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.
2. На 3 (9) делятся те, и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (9).

На 4 (25) делятся те, и только те числа, у которых две последние цифры — нули, или выражают число, делящееся на 4 (25).

*6.* На 6 делятся те, и только те числа, которые делятся и на 2, и на 3. Если каждое слагаемое делится без остатка на данное число, то и сумма разделится без остатка на данное число.

1. Если делятся на данное число все слагаемые, кроме одного слагаемого, которое не делится на данное число, то и сумма не разделится на данное число.
2. Если хотя бы один из сомножителей делится на данное число, то и все произведение разделится на данное число.

**Простые** и составные натуральные числа

Если одно из натуральных чисел делится на другое без остатка, то первое число называется *кратным* второго, а второе — *делителем* первого.

*Например.‘* 14 : 7=2, 14 — кратное числа 7, а 7 — делитель числа 14;

14 — кратное числа 2, а 2 — делитель числа 14.

Число *а* называется *простым,* если его делителями является только 1 и само число *а.* Например: 2, 3, 5, 13, 29,. . .

Число п, имеющее более двух натуральных делителей (кроме 1 и *а)*

называется *составным. Например.‘* 4, 6, 15,. . .

Число ї — ни простое, ни составное.

*Основная теорема арифметики. Rюбoe* составное натуральное число можно представить единственным образом в виде произведения простых чисел или их степеней

*Например.* 110= 2 5 ll;

12 = 2 2 3 = 2' 3;

525 = 3 5 5 7 = 3 5' 7.

Наибольший общий делитель (НОД)

Число, на которое делится каждое из данных чисел, называется *общим делителем* этих чисел.

Самый больший из общих делителей данных чисел называется их

*наибольшим общим делителем.*

*Например.‘* найти НОД чисел 126; 540; 630. Разложим эти числа на простые множители: 126=2 3 3 7; 540=2 2 3 3 3 5; 630=2 3 3 5 7.

Найдем наибольший общий делитель 2 3 3=18.

НОД(12б, 540, 630)=l8.

Таким образом, чтобы *найти НОД* нескольких чисел, нужно разложить их на простые множители, выписать их общие простые множители и перемножить.

Если наибольший общий делитель чисел равен 1, то такие числа называются *взаимно простыни.*

*Например.* 16 и 25; HOД(16;25)=l, т.к. 16 = 2 2 2 2, 25 = 5 5.

Наименьшее общее кратное (HOW)

Число, которое делится на каждое из данных чисел, называется *общим кратным* этих чисел.

Самое меньшее из общих кратных данных чисел называется их

*наименьшим общим делителем.*

*Например.‘* найти HOK чисел 63; 280; 150.

Разложим эти числа на простые множители: 63=3 3 7; 280=2 2 2 5 7; l50=2 3 5 5

Найдем наименьшее общее кратное 2 2 2 3 3 5 5 7=12600. HOK(63;280; l50)=l2600.

Таким образом, чтобы *найти HOK* нескольких чисел, необходимо разложить их на простые множители, из большего числа выписывают все множители и к ним приписывают недостающие множители из разложений остальных чисел.

Если числа взаимно простые, то их произведение и есть HOK.

Дроби обыкновенные и десятичные

Одна или несколько равных частей единицы называются *обыкновенной дробью.*

Записывается с помощью черты и двух натуральных чисел. Число, стоящее под чертой и показывающее, на сколько равных частей разделена единица, называется *знаменателем дроби.* Число, стоящее над чертой и показывающее, сколько взято таких равных частей, называется *числителем*

Дробную черту можно рассматривать как знак деления: —2 = 2 : 7

7

Дробь, у которой числитель равен знаменателю, равна единице: 

5

Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется

*правильной:* 3 7

Дробь, в которой числитель равен знаменателю или больше его,

называется *неправильной.‘* 3 8

Дроби — И

*b d*

называются *равными,* если *а d ——b с .*

*Основное свойство дроби.* Если оба члена дроби увеличить в одно и то же число раз или уменьшить в одно и то же число раз, то величина дроби не

изменится. ‘

Обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10,100,1000 и т.д.

называют *десятичной дробью:*

3 = 0,3;

10

29 = 0,29 .

100

**Периодические** дроби

Бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называется *периодической.‘* 0,3333. ..=0,(3); 2,6555. ..=2,6(5).

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

*Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную.*

Надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, а после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

*Например.* 0,(45) = 45 — 0 5

99 ll

3,1(73) = 3173 — 31 3142 1571

990 990 495

*Правило перевода обыкновенной дроби в бесконечную периодическую дробь.*

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое

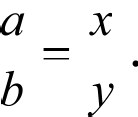
*Например.‘* 7

25

= 7 : 25 = 7,0 : 25 = 0,28.

**Отношение. Проценты. Пропорции**

*Отношением* числа х к числу у называется частное чисел х и *у,* то есть

* или *х . у.* Отношение — означает во сколько раз *х* больше у, или какую часть числа *у* составляет число х.

*Пропорцией* называется равенство двух отношений, то есть

*а* н *у* называются *краиними членами, х* и *b* называются *средними членами*

### пропорции.

*Свойства nponopции.*

* + произведение крайних членов пропорции равно произведению её

средних членов, то есть если

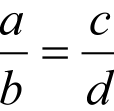
*b у*

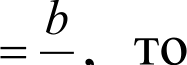
*ау —— bx .*

* + обратно: числа *а,Ь,х,у* составляют пропорцию

= —, если *ау ——bx .*



* из пропорции

*а b d с d *

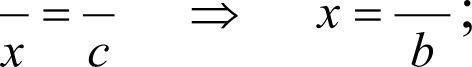
*с d b а с а*

вытекают пропорции

есть в пропорции можно менять

местами крайние и средние члены или те и другие одновременно.

* чтобы найти неизвестный средний (крайний) член пропорции, надо произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции

*а b ac*

*х d* mx *ad*

*а с с*

*Процентов* называется сотая часть какого-либо числа. Процент

обозначается знаком Обо .

Чтобы число процентов выразить в виде дроби, достаточно число процентов разделить на сто.

*Например. I* 25O1 = l ,25; 2,3O1o' 0,023.

*Нахождение процентов данного числа.* Чтобы найти п% от числа *b,*

надо *b* умножить на п и разделить на 100.

6

*Например.‘* 30% от 60 составляют

~~$ $~~  = 18. o

*Нахождение числа по его процентам.* Чтобы найти процентное отношение двух чисел *а* и *b,* надо отношение чисел умножить на 100%, то

есть *b*

100% .

*Например.* при плановом задании 60 автомобилей в день завод выпускает 66 автомобилей. На сколько процентов выполнен план?

Решение: 6 ioo% = 110% .

60

##### Целые числа

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются

*противоположными числами: I* и -1, 2 и -2, 15 и -15,...

Числа натуральные, им противоположные, а так же число нуль составляют множество *целых чисел Z.*

Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называется множеством *целых неотрицательных чисел.*

Для целых чисел определены действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, причем сложение, вычитание и умножение выполняются всегда.

Рациональные числа

Объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет *множество рациональных чисел Q.* Любое

рациональное число *—, р в Z,g е N* может быть представлено в виде конечной

или бесконечной периодической десятичной дроби.

На множестве рациональных чисел можно производить действия сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на нуль).

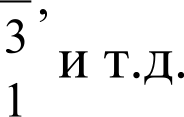
**Иррациональные** числа

*Иррациональные числом* называют бесконечную десятичную непериодическую дробь. Множество таких дробей составляет множество *иррациональных чисел І.*

*Например.* 0,131331333125...;

3,14;

е 2,7;

2

6

Действительные числа

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел даёт множество *действительных чисел,* которое обозначается Л.

### Числовая прямая, числовые промежутки

Прямую линию с выбранными на ней началом отсчёта, единичным отрезком и направлением называют *координатной прямои.*



0 l

Каждому числу можно поставить в соответствие единственную точку на координатной прямой.

Для числовых промежутков вводят обозначения:

* [а; b] или а< х < b — замкнутый промежуток (или отрезок) с началом *а п* концом *b,*
* (а; b) или at х <Ь - открытый промежуток (интервал);
* (а; b] или а< х < b; [а; b) или а< х < b — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);
* [а; + m) или х > а; (- m; b] или х < b — лучи;
* (а; + m) или х >а; b) или х < b — открытые лучи;

п (- m; + оэ) = R — координатная прямая.

Модуль числа

*Модулем (абсолютной величиной)* действительного числа ‹г называется само это число, если пй *0,* и противоположное число *—а,* если *at 0.* Модуль *а* обозначается *Дај.* Итак,

*а, если а* 0,

*— а,* если *а* < 0.

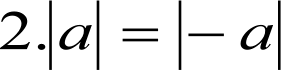
*Геометрически Дај* означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число *а,* до начала отсчёта.

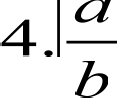
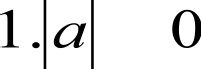
Если *а ДO,* то на координатной прямой существуют две точки п и *—а,*

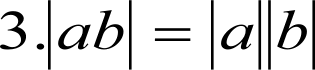
равноудалённые от нуля, модули которых равны:



-а О а

*Свойства.*



Степень с **натуральным показателем. Понятие.** Свойства

*Степенью числа а с показателем n,* где п +N, *ае* R, называется произведение п множителей, каждый из которых равен *а: n*

Число *а* называется *основанием степени, n — показателем степени. Свойства.’*

* при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остаётся прежним

*а‘- а" —— а‘+" ,т,п е N*

* при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остаётся прежним

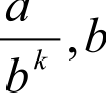
*а“ = a n p•—• ,т,п < N*

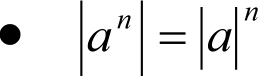
* при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остаётся прежним

*ја )‘ —— а ,т,n е N*

* степень произведения равна произведению степеней множителей

*(ab)’ —— а k bk ,k е N*

* степень частного равна частному степеней делимого и делителя:
* 0" = 0, 1‘ = 1



* если *0 < а < b,* ТО *а‘ b n*
* если *а* > 7, ТО *ат )а" ,* П]ЗИ /Н > П.
* если fi < п < 7, ТО *а‘ (а п* П]ЗИ fП > 0.
* если *а < 0,* ТО п л 0 при четном п и (о при нечетном п.

*Утверждения.‘*

* чётная степень отрицательного числа есть число положительное;
* нечётная степень отрицательного числа есть число отрицательное;
* любая степень положительного числа есть число положительное;
* при возведении нуля в любую натуральную степень получается нуль;
* при возведении 1 в любую натуральную степень получается единица.

Степень с целым и дробным (рациональным) показателем.

1. Рассмотрим степень &, где *ре Z.*

Если *р——0,то* 0 = 1, при *а /* 0.

KGЛп *р < 0,* ТО *а*

1

= , П]ЗИ

*а*

*а /* 0.

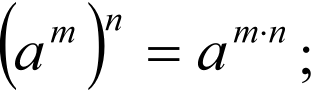
1. Рассмотрим степень *а ,* где рациональное число. Выражение *а*

имеет в общем виде смысл только при п>0. Если п>0, *р* с *Z, qе N,* то

*а —— %а .*

1. Степень с целым и рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем:

*т n*



## ab...c)" = a• bgn

#### а a П

*..c" ;*

*b b ,b* z 0.

**Квадратный корень** и его свойства

*Квадратным корнем из числа а* называется такое число, квадрат которого равен п.

Нахождение квадратного корня из числа *а* называется *извлечением квадратного корня.*

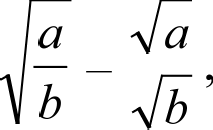
*Арифметическим квадратным корнем из числа а (пй 0)* называется неотрицательное число, квадрат которого равен *а.*

Для арифметического квадратного корня из числа *а* принято обозначение: *ја .* Знак называют *знаком арифметического квадратного корня,* а число п - *подкоренным выражением.*

Оба равенства для арифметических корней: *2a* = *а* при *а* й 0 и *дa —— —а* при *а <* 0 Moжнo объединить в одно: *ја —— Дај* при любом действительном *а.*

*Свойства.’*

1. $' = *а, где а* й 0.
2. *ab —— ја - b, где а* 0, *b* 0.

 *где а* 0, *b* > 0 .

Числовые выражения

Из чисел, знаков действий и скобок можно составить различные

*числовые выражения.*

25 —16

15

5 —(3 + 8 4) : 3.

Выполняя указанные в выражении действия, получим число, которое называется числоаыж *значением* или *значением выражения.*

Если в выражении встречается деление на нуль, то выражение не имеет смысла.

Два выражения называются *тождественно равными,* если при всех значениях, входящих в них переменных, принадлежащих общей области определений, соответственные значения этих выражений равны.

Одночлены. Многочлены

Алгебраическое выражение, представляющее собой произведение чисел

переменных и их степеней, называется *одночленов: 3ах4; -2b; 0,5c3(-ЗЬ’).*

*Стандартным видом одночлена* называется произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и степеней различных переменных:

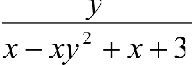
*-2,’ а,’ -9а хЗ!*

*Степенью одночлена стандартного вида* называется сумма показателей степеней переменных.

*Например.‘ 8x3y5* степень одночлена равна 3+5=8; число *7* имеет нулевую степень, т.к. *7=7x .*

Одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом или равные между собой, называются *подобными.* Сумму подобных членов можно заменить одним членом, сложив их коэффициенты и оставив ту же буквенную часть. Такое тождественное преобразование многочленов называют *приведение подобных членов.*

Алгебраическая сумма одночленов называется *многочленом. Например.‘* 2а'-3ах -6 — многочлен;

- не многочлен.

Если в многочлене все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то полученный многочлен называется тнозочленож *стандартного вида:* 2х3у’+1,8ху 4-3у+7.

*Степенью многочлена стандартного вида* называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен. Степень многочлена стандартного вида, рассмотренного ранее равна 3+3=6.

##### Формулы сокращённого умножения

* 1. Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа: ( + *b)’ — a 2 +* 2аЬ *+ b’ .*
  2. Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа: *(ь —* b)2 = п' — 2пЬ + b2 .

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности

квадратов этих чисел: ( + *b)(ь — b) ——ь’ — b 2 .*

4. Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа: (п + *Ь) З* — п З + Зп'Ь + 33b' + *b'* .

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, минус куб второго

числа: *(а — b)’ —— а’ —* 332 b + 33b' — Ь З .

1. Произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности

равно сумме кубов этих чисел: (в + *b)(а’ — ab+ b’) — а’ + b’ .*

1. Произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы

равно разности кубов этих чисел: *(а — b)(а’* + *nb* + b') — п З — *Ь З .*

Разложение многочленов на множители

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены) называется *разложением многочлена на множители.*

* 1. *способ. Вынесение общего множителя за скобки.*

*Hanpимep.‘* 3nx’ — 63 7 7 + 12пx3 = 3nx' (х — 2п 6 x’ + 4) .

* 1. *способ. Группировка.*

Если члены многочлена не имеют общего множителя, отличного от I, то следует попытаться разложить такой многочлен способом группировки. Для этого надо объединить в группу те члены, которые имеют общие множители, и вынести за скобки общий множитель каждой группы. Если после такого преобразования окажется общий множитель у всех получившихся групп, то его выносят за скобки. Этот способ называется *способом группировки.*

*Например.‘* 3(х — 2y)' — 3s + 6y = 3(х — 23) 2 — 3(х — 2y) = 3(х — 2y)(x — 2y — 1).

* 1. *способ. Использование формул сокращенного умножения. Например.*

1) (х + 3)2 —16 = (х + 3)2 — 4' = (z + 3 — 4 х + 3 + 4) = *$х —* l *px +* 7);

6 — 26 = 3) 2 — (2 3 )' 3 — 23 ) 3+ 23 ) — ( — 2)( 2 + 2 + 4)( + 2)( 2 + 2 + 4) =

2)

( — 2)( + 2)( 2 + 2 + 4)( ' + 2 + 4).

Уравнения с одним неизвестным. Еорень уравнения. Линейные уравнения

*Уравнением* называется равенство, содержащее неизвестные переменные.

*Уравнение с одним неизвестным х* записывается в видеЈх2——g *ху.*

*Корнем уравнения* называется всякое число, при подстановке которого вместо неизвестной в обе части уравнения получается верное числовое равенство.

*Решить уравнение —* значит найти все его корни, или доказать, что их

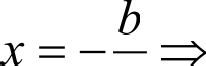
нет.

*Областью определения (ОО)* уравнения или *областью допустимых значений уравнения (ОДЗ)* называется множество всех тех значений переменных х, при которых оба выраженияЈ(х и *g(x)* имеют смысл.

Два уравнения называются *равносильными* на данном числовом множестве, если они имеют одни и те же корни или оба не имеют корней.

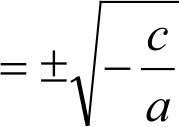
*Линейным уравнением с одним неизвестным* называется уравнение вида *ах + b 0,* где *а* и *b —* действительные числа, х — неизвестная величина.

При решении линейного уравнения возможны случаи:

* если *а f 0,* то *ах + b 0, *

*а*

один корень;

* если *а —— b 0,* то 0 х + 0 = 0, х с Л бесконечное множество решений;
* если *а —— 0, b 0,* то 0 *х+ b ——*0, 0 *х = —b* корней нет.

Квадратные уравнения. Теорема Виета

Уравнение вида пх2 + bx + с —— 0, где х — переменная, п, *b, с —* некоторые

числа, причем, п Ј *0,* называется *квадратным. а —* первый коэффициент;

*b —* второй коэффициент; с — свободный член.

Квадратные уравнения, в которых хотя бы один из коэффициентов b или с равен нулю, называются неполнышп.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *ах’ + с* | *——* 0 *(b ——* 0) | |  | | |  |
| l)  2) | Если ac > 0 — корней  Если ac < 0 х 2 | нет | *x(ax + b) ——* 0  \* | — | *b а* | x=0 |

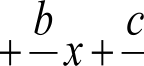
Выведем формулу корней квадратного уравнения. Для этого решим уравнение *ах’ + bx + с ——* 0, где *а f 0.* Разделим все его члены на п. Получим

равносильное уравнение:

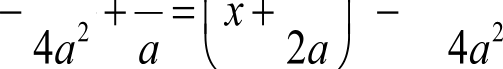
z + — х + — = о (2).

*а а*

Выделим полный квадрат:

2 *b*

+ *с* = х + *b b’ с b b’ — 4ас*

*а а la la 2a а la*

Тогда уравнение (2) примет вид

х + *b* — *b'* — 43c = 0

 *b b'* — 43c

*2*

2a 43 2

2п 4п'

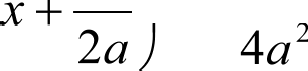
Число корней зависит от знака дроби

*—* 4ас

, Т.К. а Ј 0, тО 4п')0

4п 2

знак определяется выражением *b’ —* 43c . Обозначим его D = *b 2* —4ос и назовем *дискриминантом.* Тогда уравнение (3) перепишется в виде:

*b D* (4). Рассмотрим случаи:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| D < 0 | D=0 | D > 0 |
| *D* (0, но  4п 2    любого действительного х. Значит, корней нет. | *D* =0  4п 2  + —*ь* = 0    2a  х — *b*  2п  Значит, два равных корня х, = х . | *D* > 0, тО *D* = *D*  4п' 4п 2 2п  2п 2a    х + *b* = *CD* или х + *b* = — *CD*  2a 2п 2п 2п    Значит, два различных корня    1.2  где  D = *b’ —* 4ас |

При решении квадратного уравнения, в котором второй коэффициент

*b —* четное число, используют следующую формулу:

*b+ D*

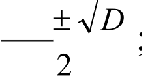
2 4 где *D* = *b*

—

*— ac .*

*а* 4 2

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называется *приведенным.‘ х’ + px+ g ——*0. Корни приведенного квадратного

уравнения можно найти по формулам: l)D)0 х = 

2)D = 0 *х* = — *Р*

2

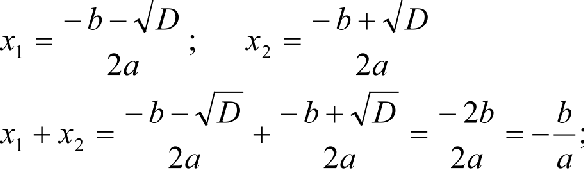
*Теорема Виета:* Сумма корней квадратного уравнения ох 2 + *bx+ с ——*о

]3 tBHd —

*b* , произведение корнеи равно *с*

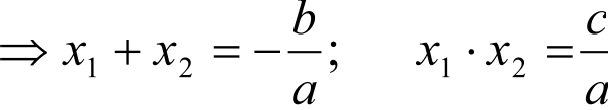
*а*

*Доказательство.‘*





|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *— b — CD* | *— b + CD $— b)2* | *D* | *b’ — D* | *b’ — b’* 43c) | 43c | *с* |
| 2a | 2a 4п' |  | 4п 2 | 4п' | 4п 2 | *а* |



Теорема доказана.

*Следствие:* Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение

### корней равно свободному члену: х + 2 - *— . •-!*

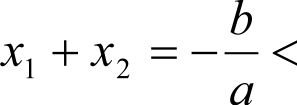
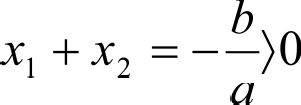
#### •2 Є‘

*Обратная теорема:* Если числа х, и *хz* такие, что

‘ l + ‘2 ‘l ’ ‘2 — — ТО ОНИ являются корнями квадратного уравнения

ЛЛ

*ах 2 + bx + с ——* 0 .

*Определение знаков корней квадратного уравнения.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Оба положительны | | Оба отрицательны | | Одного знака | | Разных знаков |
| т, т2 = )0  D |  | *а* |  |  | *а*  — 43c й 0 | *а* |
| *D* —— b' — 43c | 0 | *D* ——*b 2* — 43c | 0  0 | *D* —— b' | *D* ——*b'* — 43c й 0 |

Уравнение 4-ой степени вида ох 4 + *bx'* + с ——о , где а Ј 0, называется

*биквадратным.*

Разложение квадратного трехчлена на множители

*Квадратные трехчленом* называется многочлен вида ох' + *bx + ,* где х — переменная, п, *b, с —* числа, причем *а f 0.*

*Корнем квадратного трехчлена* называется значение переменной, при котором значение этого трехчлена равно нулю.

Квадратный трехчлен имеет те же корни, что и квадратное уравнение

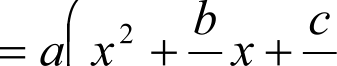
*ах’ + bx + с ——* 0. Так же применима теорема Виета.

*Теорема:* Если х, и *хz —* корни квадратного трехчлена пx2+ *yb*

можно разложить на множители: *ах 2 + bx + с ——а(х —* = ) 2-)

*Доказательство.*

+ с , его

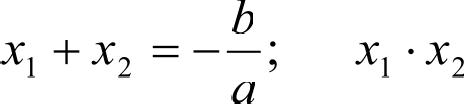
*ах’ + bx + с *

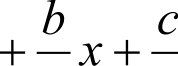
*а а*

*b*

*а *

По теореме Виета 

*а*

*а а* •(2•(m+=)=+m=,) *ах —,x —° 2°+°12)* •(•(•—•)—•.‹•—•.:-



Теорема доказана.

Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.

Уравнения с несколькими неизвестными. Системы уравнений

Уравнение вида *f(x; у)——0* называется *уравнением с двумя переменными.*

*Решением уравнения с двумя переменными* называется пара значений переменных, обращающих уравнение в верное равенство. Обычно решение записывают в виде пары чисел *xz,‘ yz).*

*Графиком уравнения с* двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное числовое равенство.

Уравнение вида *ах + by + с ——*о , где *х, у —* переменные, п, *b, с*

действительные числа, называется *линейных.*

Если ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то говорят, что надо *решить систему уравнений.*

*Решением системы* уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, удовлетворяющих каждому из уравнений.

*Решить систему уравнений* значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Две системы уравнений называют *равносильными,* если они имеют одни и те же решения.

*Система линейных уравнений с двумя переменными* имеет вид

*а,х + b, у —— с,*

*а2 х + b у —— cz*

Не решая систему линейных уравнений, можно определить число ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных.

1. Если *a b'*

*а b*

, т.е. коэффициенты при х и у не пропорциональны, то

система имеет одно решение. Графически — прямые пересекаются.

1. Если *a b*

*l*

n 2 *b*

c' , т.е. коэффициенты при х и у пропорциональны, а



свободные члены нет, то система не имеет решений. Графически — прямые параллельны.

1. Если , т.е. все коэффициенты пропорциональны, то

*a 2 b* c 2

система имеет множество решений. Графически — прямые совпадают.

*Методы решения систем уравнений.‘*

1. Метод подстановки.
2. Метод алгебраического сложения.
3. Графический метод.
4. Метод введения новых переменных.

Неравенства и их свойства

Запись, в которой два числа или два выражения, содержащие переменные, соединены знаком >, <, >, < называется *неравенством.*

Неравенства, составленные с помощью знаков >, < называются *строгими,* неравенства, составленные с помощью знаков >, й, называются *нестрогими.*

Два неравенства вида а > b и с > d называются *неравенствами одинакового смысла,‘* а вида а > b, с < d *неравенствами противоположного смысла.*

Вместо двух неравенств х < а, а < у используется запись х < а < у —

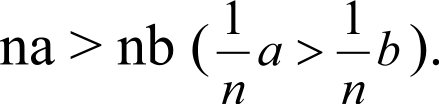
*двойное неравенство.*

Неравенства, содержащие только числа, называются *числовыми неравенствами.*

*Решить неравенство,* содержащее переменную, это значит найти множество значений переменной, при котором это неравенство является верным. Элементы этого множества называются *решением неравенства.*

Два неравенства называются *равносильными,* если множества их решений совпадают.

*Свойства.’*

1. Если а > b, то b < а.
2. Если а > b и b > с, то а > с.
3. Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное неравенство: а > b => а + с > b + с.
4. Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое- либо слагаемое, переменив его знак на противоположный, то получим верное неравенство: а + b > с => а — с > -Ь.
5. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство: а > b, п > 0 =>
6. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство: а > b, п < 0 =>

па < пЬ ( п < *b ).*

1. Неравенства одного смысла можно почленно складывать: а > b, с > d

=>a + с > b + d

1. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать: а > b, с < d => а - с > b - d
2. Если а > b > 0, с > d > 0 => ac > bd.
3. Oбe части неравенства можно возводить в одну и ту же натуральную степень: а > b > 0, m с N => а‘ > b‘.

11.Из каждой части неравенства можно извлекать корень одной и той же натуральной степени: а > b > 0, m с N '> *дa* > *ЛЬ .*

Решение линейных неравенств

*Линейным неравенством* называется неравенство вида

*ах + b* > 0 *ах + b <* 0) .

Если a>0, то неравенство m + *b* > 0 равносильно неравенству х > Если a<0, то неравенство *ах + b* > 0 равносильно неравенству х < —

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Например: |  | |
| 1. 12 — Зх > 0 | 2. 2(x + 8) — 5x < 4 — Зх | 3. 5(x — 12) < 12( — 1) — 7x |
| — 3s > —12 | 2s + 16 — 5s — 4 + 3s < 0 | 5s — 60 < 12a —12 — 7x |
| х < 4 | 0 < —12 *неверно* | *5x —*12a + 7s < —12 + 60 |
| *Ответ :* (— оэ;4) | *Ответ : корней нет* | 0 < 48 *верно* |
|  |  | *Ответ : х — любое число* |

Решение квадратных неравенств

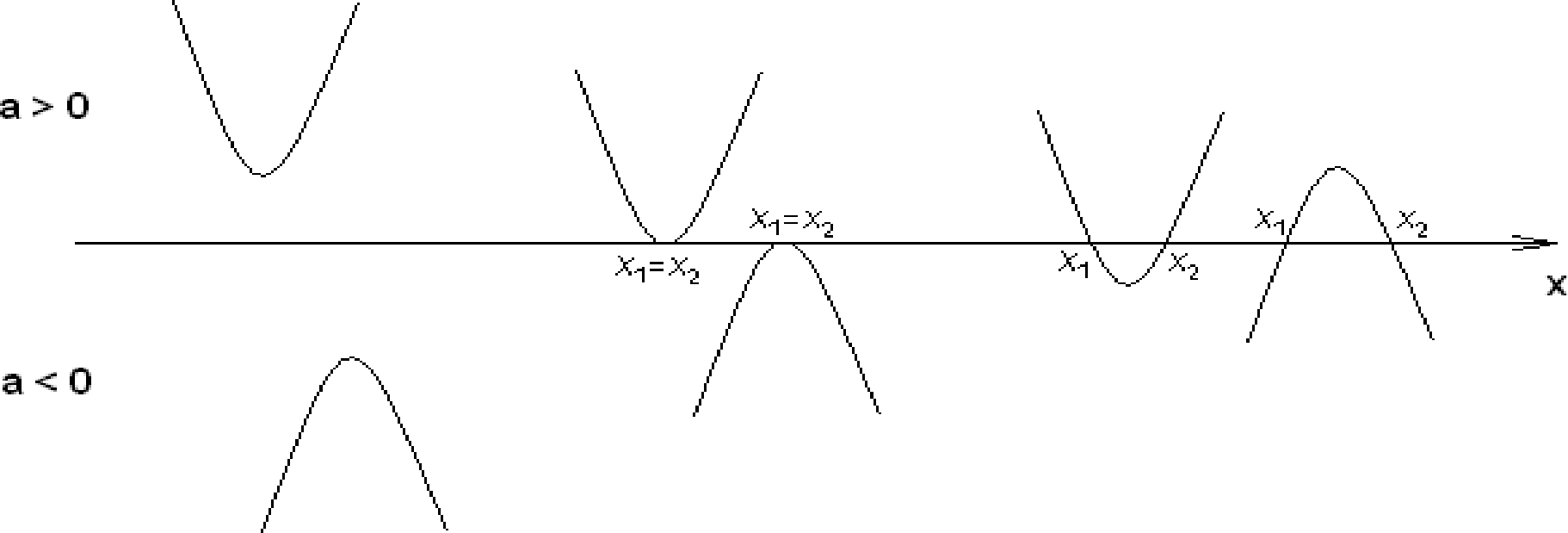
*Квадратные неравенством* называется неравенство вида *ах 2 + bx + с* > 0 *ах 2 + bx + с <* 0), где *а/* 0. BoзMoжны так же знаки нестрогих неравенств >, <

Решение неравенства такого типа можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых квадратичная функция *у —— ах’ + bx + с* принимает положительные или отрицательные значения.

С помощью графика квадратного трехчлена можно указать те значения

х, при которых будет выполняться нужное неравенство ax 2 *+ bx + с* > о или пх 2 + *bx* + с < 0. Все возможные случаи расположения параболы *у —— ах 2 + bx + с* относительно оси х представлены на рисунке.

D < 0 D = 0 D > 0



Квадратные неравенства можно решать методом интервалов.

Решение рациональных неравенств методом **промежутков**

Неравенство имеет вид *~~' '~~* > о , где *Р(х)* и *Q(x) —* многочлены. Вместо

знака > может быть любой знак неравенства.

Решение рациональных неравенств методом промежутков (методом

интервалов) основано на следующем свойстве функций вида , где *Р(х) н*

*Q(x)* рациональные выражения: если такая функция обращается в нуль в точках х и x2 (х < x2) и между этими точками не имеет других нулей или точек разрыва, то в промежутке (х„ *хz)* функция сохраняет знак.

Для нахождения таких промежутков знакопостоянства функции

 на числовой прямой отмечают все точки, в которых функция обращается в нуль или не существует (терпит разрыв). Эти точки разбивают

ЧИСЛОВ Ю П]ЗЯМ Ю HII HeGKOЛЬKO П]ЗOMeЖ **TKOB, BH Т]ЭИ** КІІЖДОГО ИЗ КОТО]ЭЫХ

функция *f(x)* сохраняет знак. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке данного промежутка.

Изменение знаков функции *Ј(х* удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой, которую чертят справа налево. На тех промежутках, где кривая проходит выше координатной прямой, выполняется неравенство *f(x)>0;* на тех промежутках, где кривая проходит ниже, — неравенство *f(x)<0.*

##### Понятие функции, график функции,

область определения, множество значений

Зависимость переменной у от переменной х называется *функцией,* если каждому значению х соответствует единственное значение у. При этом используют запись: *y——f(x).* Переменную х называют *независимой переменной (аргументом),‘ у* называют *зависимой переменной [функцией).* Значение у, соответствующее заданному значению х, называют *значением функции.*

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют

*область определения функции D(f).*

Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют

*множество значений функции Е(f).*

Элементы множества *D(f)* так же называют *значениями аргумента, и*

соответствующие им элементы множества *E(f) - значениями функции.*

*Графиком функции у — f(x)* называется множество всех точек (х; у) координатной плоскости, таких, что х с *D(f) ,* а *у —— f(x),* причем х называется абсциссой, у — ординатой.

Для того чтобы множество точек координатной плоскости являлось

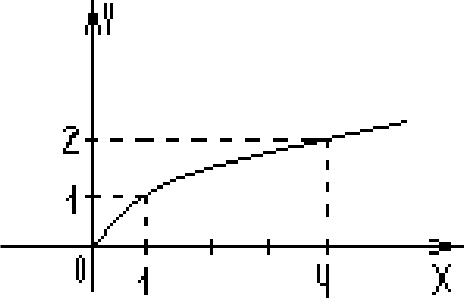
графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси Of, пересекалась с указанным графиком не более чем в одной точке.

*Способы задания функции.*

1. Аналитический — с помощью формулы: у = 5x' — 7.
2. Табличный — с помощью таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 3,5 | 7,3 | 15 |
| у | 1 | 4 | 1,8 | 9,2 |

1. Описательный.
2. Графический — с помощью графика:



##### Свойства функции

* 1. Областью определения функции называются все значения переменной х, при которых функция имеет смысл (выполнимы указанные действия).
  2. Множеством значений функции называются все значения переменной *у.*
  3. Функция у *= f(x)* называется *четной,* если для любого значения *х нз* области определения функции значение *—х* так же принадлежит области определения (область определения симметрична относительно начала отсчета) и выполняется равенство: *f(-x) — f(x).* График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси *Оу).*

Функция у = f(x) называется *нечетной,* если для любого значения х из области определения функции значение *-х* так же принадлежит области определения и выполняется равенство: *f(-x) — -f(x).* График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

* 1. *Нулем функции* называется такое значение аргумента *х* из области определения функции, при котором значение функции равно *0.* Для того, чтобы найти нули функции необходимо решить уравнениеЈ(х2 *—— 0.*
  2. Промежутки, на которых функция либо положительна, либо отрицательна, т.е. имеет один и тот же знак, называются *промежутками знакопостоянства.*
  3. Функция называется *периодической,* если существует такое число

*Т f 0,* что для любого значения аргумента х из области определения значения *х+Т п x—T* так же принадлежат области определения функции и выполняется равенствоЈ(х2 *—— f(x + Т) —— f(x - Т).*

* 1. Функция называется *возрастающей на промежутке Х,* если для любых х, и х, из этого промежутка, таких что х, < *хz,* выполняется неравенство Jx < *f[x z),* т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется *убывающей на промежутке Х,* если для любых х, и *хz* из этого промежутка, таких что *х < х ,* выполняется неравенство

*f(x )* > *f хz),* т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастающая или убывающая на некотором промежутке функция называется *монотонной.*

Промежутки, на которых функция возрастает или убывает, называются

*промежутками монотонности.*

* 1. Функция называется *ограниченной снизу* на некотором множестве Ј, если существует такое действительное число *М,* что для каждого х сЈ , *f(x) М.*

Функция называется *ограниченной сверху* на некотором множестве Ј, если существует такое действительное число *М,* что для каждого х сЈ , *f(x) М.*

Функция называется *ограниченной* на некотором множестве Ј, если она ограничена и снизу, и сверху.

* 1. *Наибольшим значением функции* называется самое большое значение, которое принимает переменная у; *наименьшим значением функции* называется самое маленькое значение, которое принимает переменная *у.*

Линейная **функция,** ее свойства и **график**

Функция, заданная формулой *у —— kx+ b ,* где *к п b -* некоторые числа, называется *линейной.*

Коэффициент *к——tga* характеризует угол п, который образует прямая

*у —— kx + b с* положительным направлением оси ОО, и называется *угловым коэффициентом.* Если *к>0,* то угол острый; если *к<0,* то угол тупой; если *к——0,* то прямая совпадает с осью *Ох* или ей параллельна.

*Свойства.‘*

1. D(y)=R.

2. E(y)=R.

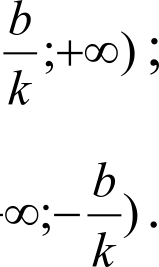
1. Функция ни четная, ни нечетная, т.к. 2(—x) = —Ъ + *b х)* не является

четной; *y(—x) —— —(kx — b) —р(х)* не является нечетной.

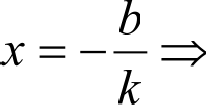
1. у = 0 при х = *b*

*k*

(нули функции).

1. Промежутки знакопостоянства:
   * если к > 0, у < 0 при х с *(—т;—kb ) ;* у > 0 при
   * если к < 0, у < 0 при х с (— ;+=) ; у > 0 при
2. Функция возрастает при *к>0* и убывает при *к<0* на R.
3. Функция неограниченна, непрерывна.

Графиком функции является прямая. Для ее построения можно найти точки пересечения с осями координат:

* + с осью ОХ: у = 0,

А( *b* , 0);

*k*

* + с осью ОУ: х = 0, у = b B(0; b).

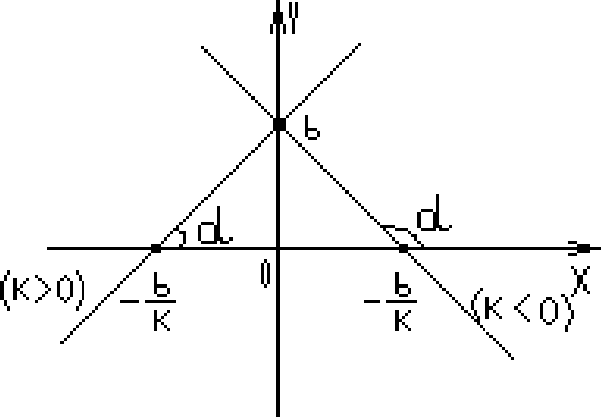
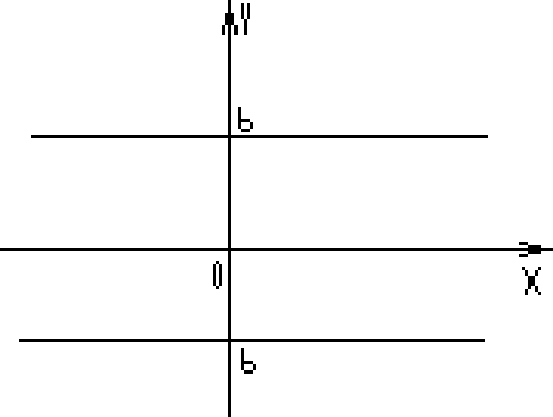


График функции = Н + є может быть построен с помощью параллельного переноса на b единиц вверх (b>0), или вниз (b<0) графика функций *у ——kx.* Зависимость *у —— kx* называется *прямой пропорциональностью.*

Рассмотрим частные случаи линейной функции.

|  |  |
| --- | --- |
| Если *b 0,* то *у ——kx .* | Если *k——0,* то *у=Ь.* |
| *Свойства.’*  1. D(y)=R.  2. E(y)=R.   1. Функция нечетная, т.к. 2. у = 0 при х = 0. 3. Промежутки знакопостоянства:  * если к > 0, у < 0 при х с (—=;o) ; | *Свойства.*  1. D(y)=R.  2. E(y)=b.  3. Функция четная, т.к.  4. у 0.  5. Промежутки знакопостоянства:   * если b > 0, у > 0; |

|  |  |
| --- | --- |
| у > 0 при х с (0;+=) ;   * если к < 0, у < 0 при х с (0;+• ;   у > 0 при х с (—=;0) .   1. Функция возрастает при *к>0* и   убывает при *к<0* на R.   1. Функция неограниченна, непрерывна.   Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат. | * если b < 0, у < 0.  1. Функция постоянна на R. 2. ФуНкция непрерывна.   Графиком функции является  \* рямая, параллельная оси Oн.  (b 0)  (b ‹ о) |

Функция = *k ,* ее свойства и **график**

Если переменная *у* обратно пропорциональна переменной х, то эта зависимость выражается формулой *у —— k ,* где *k* о - коэффициент обратной

пропорциональности.

*Свойства.’*

1. D(y) = (— m;0) (0;+m).

2. Е(у) — (— m;0) (0;+m).

3. Нечетная, т.к. *y(— х) —— —— ———у(х).*

1. Промежутки знакопостоянства:
   * если *k* > *0,* то у > *0* при х с (0;+=);

у < *0* при х с (— m;0) ;

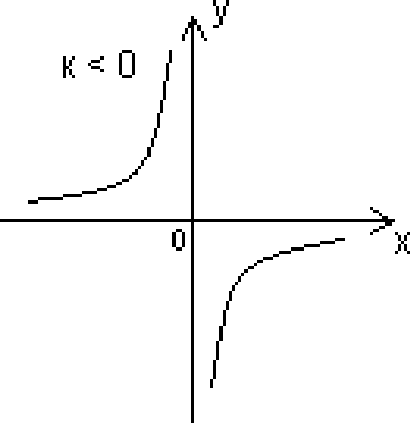
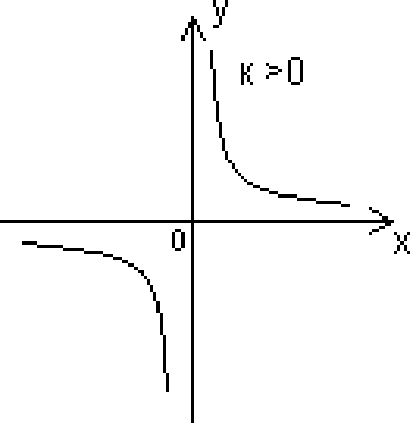
* + если *k < 0,* то у > fi при х с (—=;0) ;

у < *0* при х с (0;+m).

1. Монотонность:
   * при t < 0 функция возрастает на (— т;0) и (0;+т);
   * при *k* > 0 функция убывает на (— т;0) и (0;+т).

Графиком обратной пропорциональности у = является кривая,

состоящая из 2-х ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется *гиперболой.*



Ф **НКЦИЯ** *у ——ах’ ее* свойства и график

ФунКцИЯ Вида Ј = *ах 2 ,* где п — некоторое число, *а 0,* называется

*квадратичной.*

График функцИИ у = *ах’* может быть получен с помощью графика

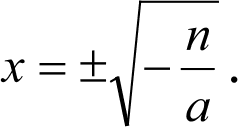
функции *у —— x 2*

* + если all , то растяжение вдоль оси *Оу* в п раз;
  + если *0<a+1,* то сжатие вдоль оси Оу в раз;
  + если *a<0,* то симметрично относительно оси *Ох.*

Рассмотрим свойства и график функции Ј = пх2 в зависимости от знака п.

|  |  |
| --- | --- |
| п > *0* | *а < 0* |
| 1. Д (у) = R.  2. Е (у) = 0;+т).  3.Функция четная, т.к. | 1. Д (у) = R.  2. Е (у) =(—=;о] .  3.Функция четная, т.к. |

|  |  |
| --- | --- |
| *y(—x) = a(—x)* 2 = пх2 = у(х) .  4. у = *0* при *х —— 0.*  5. y>0 при х с (— m;0) (0;+m).   1. Монотонность:    * функция возрастает на [о;+=);    * функция убывает на (—=;0).   7. y„g, = *0* при *х——0.*  8. Функция ограничена снизу нулем, непрерывна. | *y(—x) = a(—x)* = пх2 = у(х) .  4. у = 0 при *х —— 0.*  *5. уф0* при х с (— m;0) (0;+m).   1. Монотонность:    * функция возрастает на (—=;0] ;    * функция убывает на [0;+=). 2. *нпиб* при *х——0.* 3. Функция ограничена сверху нулем, непрерывна. |



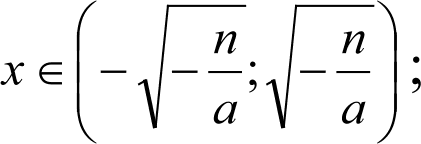
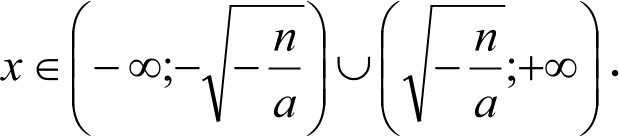
**Графики ф НКЦИЙ** у ——пх2 + п И у = п(х — 3) 2 . **Преобразование графика**

Графиком функции = m 2 + п является парабола, которая может быть получена из графика ф НКЦИИ *у —— ах 2 G* пОмощью параллельного переноса вдоль оси *Оу* на nJ единиц вверх, если п>fi; или на п единиц вниз, если *п<0.*

Рассмотрим графики функции *у ——ах 2 + п* при *а* > *0.*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. D(y)=R. | 1. D(y)=R. |
| 2. Е(у)= о;+=). | 2. Е(у)= o;+m). |
| 3. Четная. | 3. Четная. |
| 4. Нулей нет. | 4. у = 0 при |

|  |  |
| --- | --- |
| 6. Возрастает на [0;+=); убывает на (—=;0].  7.  Ограничена снизу п, непрерывна. | *у < 0* при   1. Возрастает на [0;+т); убывает на (—=;0]. 2. *нпим* — з при *х —— 0.* 3. Ограничена снизу п, непрерывна. |



Рассмотрим графики функции *у —— ах 2 + п* при *а < 0.*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. D(y)=R. | 1. D(y)=R.  2. Е(у)=   1. Четная. 2. Нулей нет. 3. *у < 0* при х с Л . 4. Возрастает на (— т;0]; убывает на [0;+т).     8. Ограничена сверху п, непрерывна. |
| 2. Е(у)= (— m; п). |
| 3. Четная. |
| 4. у = 0 при |
| *у 0* при |
| 6 Возрастает на (— т;0]; |
| убывает на [0;+=). |
| 7. i'...б = п при *х* = *0.* |
| 8. Ограничена сверху п, непрерывна. |

Графиком функцИИ у = *a(x — т)2* является парабола, которая может быть получена в результате параллельного переноса графика функциИ *у ——ах 2* вдоль оси *Ох* на m единиц вправо, если ш>0,’ или на m единиц влево, если

|  |  |
| --- | --- |
|  | *а < 0* |
| 1. D(y)=R. | 1. D(y)=R.  2. Е(у)=(—=;о] .   1. Ни четная, ни нечетная. 2. у = fi при *x——m.* 3. у < fi при 4. Возрастает на убывает на 5. y,q = *0* при х = *т.* 6. Ограничена сверху нулем, непрерывна. |
| 2. Е(у)= 0;+m). |
| 3. Ни четная, ни нечетная. |
| 4. у = *0* при *x——т.* |
| 5. у > *0* при |
| 6. Возрастает на |
| убывает на |
| 7 *fiнauн* ' |
| 8. Ограничена снизу нулем, |
| непрерывна. |

График функции (х — ш)' + п может быть получен с помощью 2-х параллельных переносов описанных выше.

Преобразование графиков

1. График функции *у = f х)+ п* можно получить из графика функции *у —— f х) с* помощью параллельного переноса вдоль оси Оу на п единиц вверх, если п>0, или на п единиц вниз, если *т 0.*
2. График функции *у —— f(х — т)* можно получить из графика функции *у —— f х) с* помощью параллельного переноса вдоль оси *Ох* на mJ единиц вправо, если m>0’, или на ю единиц влево, если *ш<0.*
3. График функции *у — f $х — т)+ п* можно получить из графика функции *у —— f х) с* помощи 2-х параллельных переносов: вдоль оси Of на п единиц вверх, если п>0; или на единиц вниз, если *п<0.,* вдоль оси *Ох* на m единиц вправо, если m>fi; или на ю единиц влево, если *ш<0.*
4. График функции *у = —f х)* можно получить из графика функции

*у —— f х)* с помощью симметричного отображения относительно оси Oн.

1. График функции *f(— х)* можно получить из графика функции

*у —— f х)* с помощью симметричного отображения относительно оси Оу.

1. График функции у = *f(ах)* МОЖНо получить из графика функции

*у —— f х) с* помощью сжатия вдоль оси *Ох* к оси Of в *а* раз, если п>7’, или растяжения вдоль оси *Ох* от оси *Оу* в раз, если *0<a<1.*

1. График функции *у ——af(х)* Можно получить из графика функции

*у —— f х)* с помощью растяжения вдоль оси Оу от оси Oн в *а* раз, если п>J, или сжатия вдоль оси *Оу к* оси Oн в раз, если fi<n<J.

1. График функции у = )J(x) можно получить из графика функции *у —— f х)* следующим образом: часть графика *у — f х),* лежащая над осью *Ох* сохраняется, часть его, лежащая под осью Oн, отображается симметрично

относительно оси *Ох.*

1. График функции у = Ј(х)) можно получить из графика функции *у —— f х)* следующим образом: при х 0 график у = *f х)* сохраняется, а при *x<0* полученная часть графика отображается симметрично относительно оси Оу.

##### Квадратичная функция. Посторенние графика квадратичной функции

Функция, заданная формулОй у = *ах 2 + вх + с ,* где *х,у —* переменные, *а,в,с*

заданные числа, *а/* 0, называется *квадратичной.*

Существует несколько способов построения графика квадратичной функции. Опишем два из них.

1. *способ.* Квадратичную ф НКЦИю у = *ах’ + вх + с* всегда можно привести к виду = о(х — ю)' + п путем выделения полного квадрата.

Преобразуем квадратный трехчлен пх 2 + вх + с . Имеем:

nx 2 + *bx + с —— а х 2* + — z + — = п z 2 + 2x-

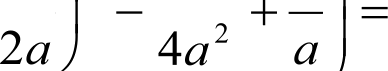
*а а*

*t› t› 2*

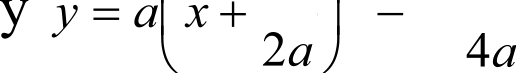


2п + 4п 2 4п 2

*b 2 b’ с*

= *а* х + *b b —* 4ас *b b’ —* 4ас

*2 2 2*

Получили формул

*b b'* — 43c

Эта формула имеет вид у ——п(х — 3) 2 + п , где ю

2п 4п

График функцИИ *у —— a(x — т)’ + п* получается из графика функциИ у = *ах 2*

с помощью параллельного переноса, при котором точка (• i› ) • ереходит в

точку (х + ю;жу

+ о) . Значит, график любой квадратичной функции

*у ——ах’ + вх + с* получается из графика ф НКЦИИ у = *ах’ G* пОМощью указанного параллельного переноса.

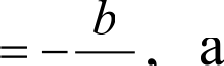
1. *способ.* График функцИИ *у —— ах 2 + вх +* есть парабола. Ее вершиной

является точка *(т, n),* где ю

Осью симметрии параболы

2п 4п

служит прямая х = m, параллельная оси Of. При п > *0* ветви параболы направлены вверх, при п < *0 —* вниз. Для построения графика квадратичной функции находят координаты нескольких точек соответствующей параболы:

* абсциссу вершины параболы по формуле х 

2a

= т \* i

* нули функции;
* точку пересечения параболы с осью Of — точку *(0; с),’*
* дополнительные точки, если необходимо.

ординату

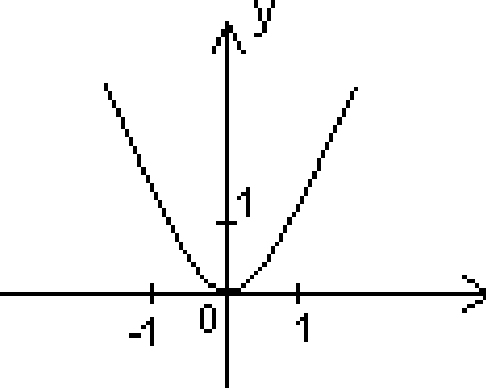
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Д >0  Два корня х и x2; график пересекает ось  *Ох* в двух точках. | Д = 0  Один корень хо: график касается оси *Ох.* | Д < 0  Корней нет; график по одну сторону от оси *Ох.* |
| а > 0 |  |  |  |
| а < 0 |  |  |  |

Степенная **функция** у — xП

Функция вида *у n* называется *степенной* функцией с показателем степени п.

Лслп п = 2, *то - Ј’.*

1. D(y) = R.

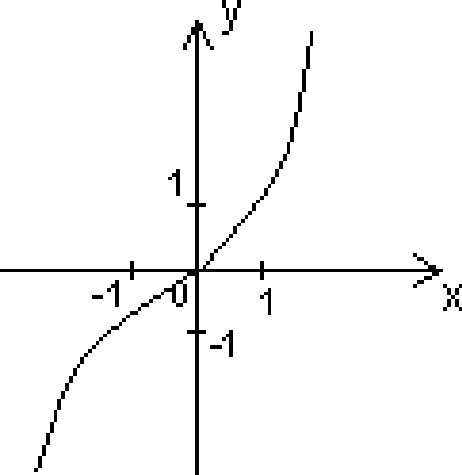
2. Е(у) = 0;+т).

1. Функция четная.
2. *y=0* при *x=0.*

5. у > *0* при х с (— m;0) (0;+m).

1. Функция возрастает на [0;+=); Функция убывает на (— т;0].
2. Функция непрерывна, ограничена снизу нулем.

Лслп п = *3, то* Ј = Ј'. 1. D(y) = R.

2. Е(у) =R.

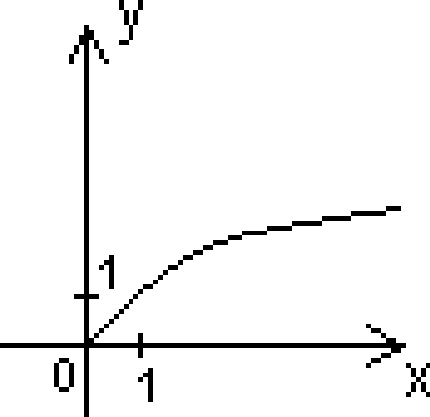
* 1. Функция нечетная.
  2. *y=0* при *x=0.*
  3. у > fi при х с (0;+=);

*у < 0* при х с (— =;0).

* 1. Функция возрастает на Л.
  2. Функция непрерывна, неограниченна.

1 *то у —— х*

2

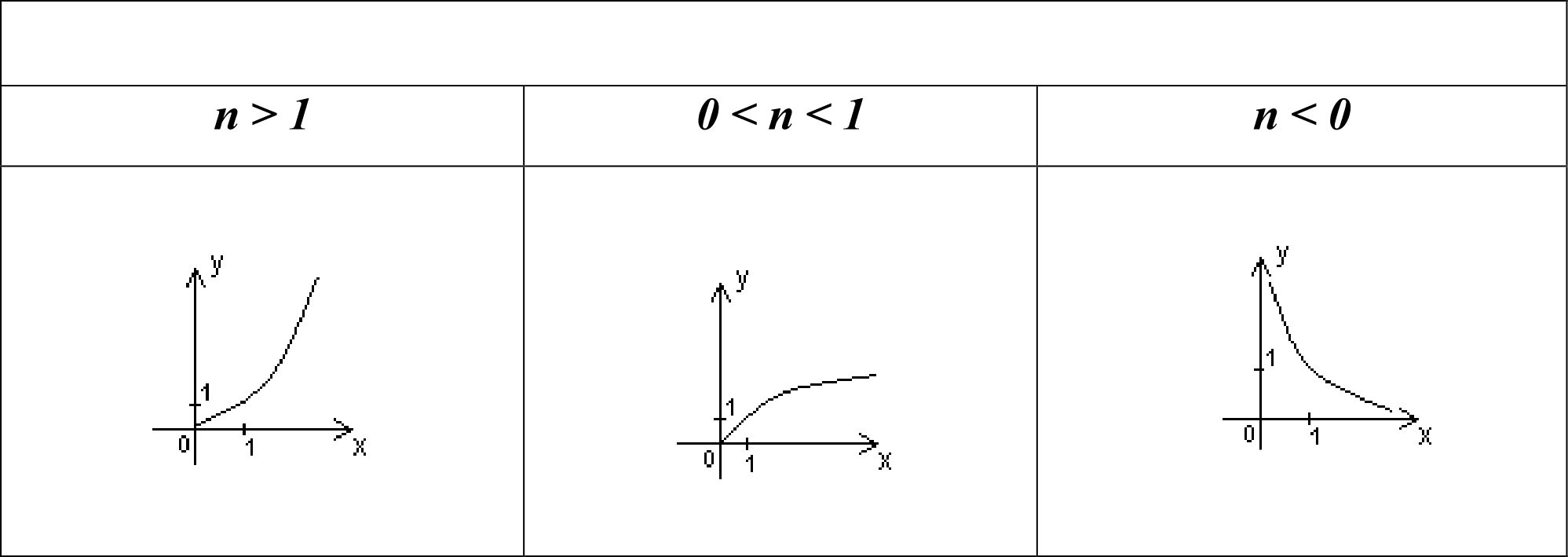
1. D (у) = 0;+т).

2. Е (у) = 0;+т).

1. Функция ни четная, ни нечетная.
2. *y=0* при *x=0.*
3. у > *0* при *х* > *0.*
4. Функция возрастает на [0;+=).
5. Функция непрерывна, ограничена снизу нулем.

Графики степенной функции при различных значениях п представлены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| и > # , и cN | | п < 0, п cZ | |
| п — четное | п —нечетное | п - четное | п - нечетное |
|  |  |  |  |



Арифметическая прогрессия

*Бесконечной числовой последовательностью* называется функция,

определенная на множестве натуральных чисел. Ее принято обозначать ( п) • Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со

второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется *арифметической прогрессией.*

Это число *d* называется *разностью арифметической npoгpeccии. d —— а — а —— аз — а —— ... —— ak — ak-:*

Арифметическая прогрессия задается своим первым членом *а* и

разностью *d.*

Любой член арифметической прогрессии можно вычислить по формуле

*формула n-го члена) а, ——* no + lx — l$ *d*

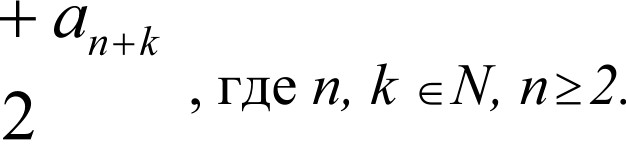
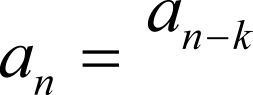
Если *d* > *0,* то арифметическая прогрессия является *возрастающей.*

Если *d < 0,* то арифметическая прогрессия является *убывающей.*

Если *d 0,* то все члены арифметической прогрессии равны между собой и она является *постоянной последовательностью.*

*Характеристическое свойство арифметической nporpeccuu.*

Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов.

\_ п, — + n, +

*а*

л ИЛИ

2

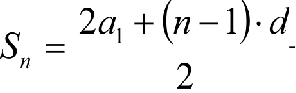
Сумма членов равноудаленных от концов прогрессии есть величина постоянная, т.е. *а,+ а* —— п + ‹г, —-

Если на плоскости отмечать точки с координатами *n; an)* то, все эти

точки будут лежать на графике функции, задаваемой формулой

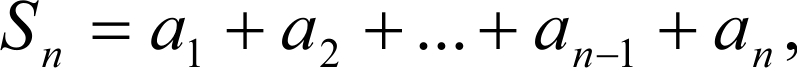
*у —— dcx —* l) + •

Это означает, что арифметическая прогрессия является линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел *N* и её можно задать формулой вида п ' *kЙ + b ,* где *k, b —* числа.

*Сумма n — первых членов арифметической npoгpeccии* вычисляется по

формуле Л 2

#### Доказательство.‘

Запишем сумму п—первых членов арифметической прогрессии двумя способами.

’п ' •. + •.—1 + + •2 + *at .*

Сложим почленно эти равенства.

2 п ' п + п, ) + $п *+ а — )+ ..+ ја — + а )+ ја + а )*

В каждой скобке стоит сумма виду *а, \_ + о+ ,* где *k —— 0, 1, ..., n-1.*

*а k + a+t k ——* • +( п — *k —*1)d + п $1 + *k —* 1)d —— п + *nd — kd — d + at + d + kd — d ——*

= 2nl + *nd — d ——* 2п, + *d$n* —1) *at + а .*

# Таких скобок ровно п, тогда 2 = (п + • -)

*(n —* l) *d*

2 , что и требовалось доказать.

# » \*. -

*+ a n*

п

2

**ИЛИ**

Геометрическая прогрессия

*Геометрической npoгpeccиeи* называется числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый последующий равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число не равное нулю.

Это число называется *знаменателем геометрической npoгpeccии*



bA—

Геометрическая прогрессия задается своим первым членом *b* и знаменателем q.

Любой член геометрической прогрессии можно записать по формуле

*формула n-го члена) bn by - q‘ '*

Геометрическая прогрессия *возрастает,* если bi > 0, g > 1 или

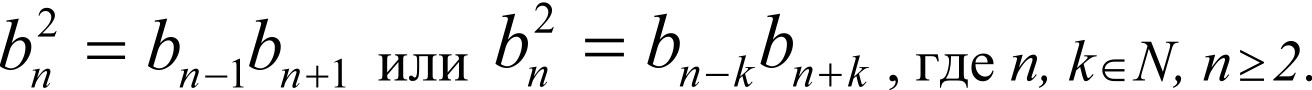
*be* < 0,0 < g < 1.

Геометрическая прогрессия *убывает,* если be > 0, q < l или

be > 0,0 < q < 1.

Если g < *0,* то последовательность является ни возрастающей, ни убывающей, т.к. *знаки* ее членов *чередуются.*

*Характеристическое свойство геометрической nporpeccuu.*

Последовательность чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начинается со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов

### Произведение членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть

величина постоянная, т.е. *bjbp — b¿bp ј — ...*

Формула суммы п-первых членов геометрической прогрессии

b $q Л —1)

•' g — 1 , при g

*Доказательство.*

Сумма п—первых членов геометрической прогрессии равна

*So* —— *b* + *b,* + ... + *b* , + *b, (i).*

Если g *1,* то все члены равны b , тогда Ј, = *b + b + ...+* bi Nbi — что и требовалось доказать.

Если g Ј *1,* то умножим равенство fi, = *b + b + ...+ by \_ + by* на g, тогда

*n — qb + qb + + bn— + qbn*

По определению геометрической прогрессии

*qS = by + b* + ... + *b, + qb* (2).

Вычтем равенство (1) из равенства (2), получим

*S — g —— bI* + *b + + bn —I + bn b2 ЬЗ b—n*

*qbn’›*

S, (l — g) = *b, + b bi*) + ... + *(be—i* — *be—i) + be be) qb ——b, qb “*

Ј *be — qb* \_ qb — be \_ *b* q Л—*р*l *— be b,q‘ — by be* $q П —1)

### 1 — q q — 1 q — 1 g — 1 g — 1

  ~~)~~  что и ребовалось доказать.

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей,* если

*Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому стремится сумма ее п—первых членов при



Сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

