## ГЛАВА 7. ЛОГИКА

Утверждения «общие» и формальные

Как показывает опыт, мы не всегда формально точно изла- гаем словами то, что подразумеваем. При этом обычно собёсед- ник нас понимает правильно, поскольку мыслит также нефор- мально. Умение понимать неполные, неточные формулировки

‹ как надо, а не как сказано+ , заложено в нашей культуре, в частности, в культуре языка.

* Молодой человек, не подскажете, на этом трамвае я до psiн- ка доеду?
* Знаете, уважаемая, я предскаэаниями не занимаюсь...

Даже небрежііые утверждения понятвы и не вызывают у собеседников проблем до тех пор, пока речь идет о привычных вещах.

Изаестный анекдот. Затерянные в

небе Сахары воздухоплаватели ви- “’

дят в пустыне бедуина. “ ’

* Сэр, скажите, пожалуйста, где мы находимся, хотя бы приблизи- тельно!
* Отчего же приблизительно? Вы, господа, совершенно определенно

в корзине воздушного шара. “

В этот момент порыв ветра уносит шар s сторону.

* Нам не повезло. Это был математик, — печально говорит один из аэронавтов другому.
* Джон, почему ты решил, что этот бедуин — математик?
* Да потому, Эдди, что его ответ абсолютно точен и совершен- но бесполезен.

*Пpuмep.* + Мужчины носят пиджаки, а женщины — пла- тья» . Простая формула, которая нам понятна: мужчины часто ходят в пиджаках, хотя совсем не обязательно, а

**Ш£ІHIQИ** Н bI ЧІІСТО **НОСЯТ ПЛ ІІТЬЯ, ХОТЯ ОЫВП£IT, ЧТО И ПИДШіlКИ**

тоже. Кроме того, все это неверно на пляже или в бане.

Вы не скажете, который час?

— Отчего ж нет? Охотно скажу — спрашивайте.

Теперь представим себе похожую формулу. + Квадраты имеют по четыре стороны, а треугольники — по три». Следует ли это понимать в том же смысле? — мол, у квадрата обычно четыре стороны, но в особых случаях может быть одна или две, а треугольники часто встречаются с **тремя сторонами,** но бывают и с пятью, и с четырьмя, при этом третыо на пляже не надевают.

* Молодой человек, а все же, до рынка в какую сторону?
* Сейчас... сейчас... (ковыряясь в навигаторе). Вот, бабуля, двигайтесь курсом 232 градуса 45 минут.

Обратный пример: известно, что у квадратов диагонали перпевдикулярны. Это означает, что не существует квадрата, который имел бы неперпендикулярные диагонали.

Попробуем поставить похожее бытовое утверждение: «все голлавдцы живут в Ролландии». Означает ли это, что не суще- ствует голландца, который живет не в Ролландии? Таких гол- ландцев мвого. Значит, утверждение, что голландцъі живут в Ролландии, неверно?

Кажется, все понятно. Утверждение, верное «в общем и целом», может быть неверным формально. Математические утверждения должны быть формальными. Их нужно пони- мать буквально и составлять их нужно так, чтобы можно было буквально и однозначно понять. Существует множество под- ходов к построению логики. Мы рассмотрим лишь несколько приемов, позволяющих высказываться и понимать утвержде- ния формально.

Кстати, развитием математических логик среди прочих занимался Чарльз Лютвидж Доджсон. Одна из книг по логике «Логическая игра» вышла у не- го такой, что он решил ее издать под именем Льюиса Кэрролла.

В примере с диагоналями квадрата и голландцами доста- точно расставить уточнения, о каком множестве объектов идет речь: обо всех, хотя бы об одном или ви об одном.

Например, у всякого квадрата диагонали взаимно перпен-

дикулярны.

Ясно, что утверждение «всякий голландец живет в Гол- ландии •› ошибочно. Можно сделать так: ‹существуют гол- ландцы, живущие в Голландии» . Это верно, но бессодержа- тельно — на то она и Голландия. Еще одно: ‹существуют голландцы, не живущие в Голландии» . Заметьте, два послед- них утверждения не отрицают друг друга — они выполняются одновременно.

# Отрицанне

Важно уметь строить отрицания к утверждениям. Если ут- верждается, что ace объекты какого-то множества *оdладают* каким-то свойством, то отрицание подразумевает, что хотя бы o#uн объект этим свойством *не обладает.*

Наоборот — если исходное утверждение говорит, что тотя бы o#uн *объект* обладает неким свойством, то отрицание будет говорить, что все объекты этим свойством *не обладают. too* можно записать формально, используя буквенвые обозначе-

Для утверждевия

*Все Х из множества М обладают свойством 51*

отрицание будет выглядеть так:

*Хотя бы один Х из множества М не обладает свойством 51*

Для утверждения

*Хотя бы один Х из множества М обладает свойством 51*

отрицание строится по такому же правилу:

*Все Х из множества М не обладают свойством Ѕ.*

Если *А* отрицание для *В,* то *В* отрицание для *А.* При этом верным будет одно и только одно из этих утверждений.

*А. Все* птицы летают;

*В. С уществует* птица, которая не летает.

**ЭТИ В€І]ЗШД£ІНИЯ ОТ}ЗИЦПНИ** Я Д]З Р **ДЛЯ Д}З P£f. ДПНHOM**

случае верно только второе.

Зада•іа **186.** Даны утверждения. а) Все кошки ступают мягко.

6) Среди англичан найдется хотя бы один брюнет.

в) Существует квадрат, у которого диагонали не перпен-

дикулярныдругдругу.

г) Все собаки имеют хвосты.

Поетройте отрицания к этим утверждениям.

Обратите внимание на то, что формальные утверждения про кошек и англичан получаютея етранными. Мы так не го- ворим. Пато утверждение про квадрат не звучит нелепо. Ma- тематичеекие объекты и их евойетва, как правило, точно oпpe- делены, и поэтому формальные утверждения о математичееких объектах не выглядят иекуественно.

**Задачи**

Задача **187.** Даны утверждения. а) Все мыши имеют хвоет.

6) Найдется река, в которой не водитея рыба.

в) Сущестует кошка, не покрытая шерстью. г) Все треугольники — оетроугольные.

Поетройте отрицания к этим утверждениям.

Задача **188.** Выберите отрицания к утверждению «вее рыбы плавают» :

1. Все, кто не плавает, — не рыбы.
2. Все, кто плавает, — рыбы.
3. Все рыбы не плавают.
4. Не веякая рыба плавает.
5. Не веякое плавающее животное — рыба.
6. Найдется неплавающая рыба.
7. Хотя бы одна рыба не плавает.

Задача 189. Выберите отрицания к утверждению «все слоны живут в Африке» :

1. Хотя бы один слон не живет в Африке.
2. Не вее животные в Африке — елоны.
3. Все елоны живут не в Африке.
4. Все, кто не живет в Африке, — не елоны.
5. Все животные в Африке — слоны.
6. Не все слоны живут в Африке.

Т) Найдется слон, не живущий в Африке.

Противоположные утверждения

Противоположное утверждение — не то же самое, что от- рицание. Два противоположных утверждения утверждают одно и то же, но ‹cc разных сторон» . Поэтому они одновремен- но верны или неверны. Для утверждения «всякая птица лета- ет•› противоположным утверждением будет «если что-то не летает, то это — не птица» .

Формальная запись поможет понять общий принцип. Для утверждения

А. *Все Х из множества М обладают свойством 51.*

противоположным будет утверждение

В. *Если Х не обладает свойством 51, то Х не принадле-*

*жит множеству М.*

Еще один пример противоположных утверждений: А. Все квадраты являются параллелограммами;

*В.* Если фигура не параллелограмм, то она не является квадратом.

Построение отрицаний и противоположных утверждений широко используется при доказательствах.

# Проверка истинности.

Доказательства и контрпримерьl

Истинность или ложность общих утверждений про дере- вья, людей, рыб и т.п. обычно принимается как некоторое со- глашение. «Все деревья имеют листъя» . В целом верно, но как-то не очень. Если не считать хвою разновидностью листъ- ев, это уже неверно. Кроме того, зимой многие деревья теряют листья. А как быть с сухими деревьями?

Математика старается избегать таких неоднозначностей и неуточненностей, а если все же приходится с ними иметь дело, математики придумывают для этого специальные средства.

Есть утверждения, которые изначально считаются истин-

ными. Их называют аксиомами, и с ними все в порядке их

не приходится проверять. Другие утверждевия приходится опровергать или доказывать. Доказательство представляет со- бой **цепочку утверждений, иногда** довольно сложную.

Иногда очень легко доказать, что некое утверждение лож- но. Обычно это ложные утверждения вида «Всякий Х облада- ет свойством S». Для этого достаточно привести пример, пока- зывающий, что утверждение может не выполняться. Такой опровергающий пример называют *контрпримером.*

Приведем два примере.

1. Утверждение: «Любое арифметическое выражение име- ет значение» . *Контрпример:* выражение значения не име-

ет. Значит, утверждение ложно.

1. Утверждение: «Внутри всякого треугольяика найдется точка, одинаково удаленная от всех вершин этого треуголь-

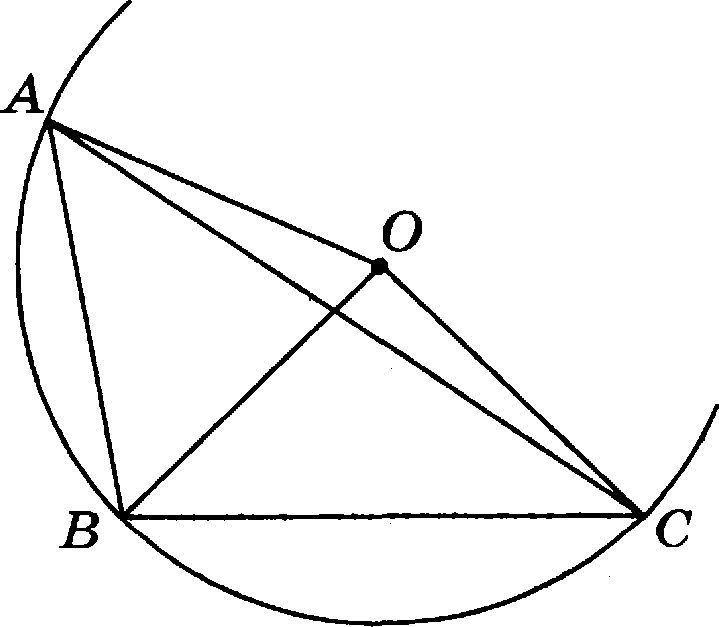
Разумеется, **каков** бы ни был **треугольник, точка,** равно- удаленная от его вершин, существует — центр описанной ок-

}3 ШНОСТИ. TO £ІСЛИ Т}З£І РОЛ ЬНИК Т **ПО РОЛЬНЫи** , ТО **3TП ТОЧКі1**

будет не внутри треугольника, а снаружи. А если прямо- угольный, то эта точка лежит на гипотенузе. Таким образом,

**МЫ НіlШЛИ КОНТ]ЗП}ЗИМ£І}З** — Т ПО РОЛ bH ЫЙ Т]З£І **РОЛЬНИК, BH** Т-

ри **которого такой точки нет.** Утверждение опровергнуто.



Контрпример не всегда **легко найти. Существует мвого ма- тематических утверждевий (гипотез), которые не доказавы** и для которых не найдены контрпримеры.

Знаменитая гипотеза Гольдбаха утверждает, что любое натуральное четное число начиная с 4 можно записать в виде суммы двух простых чисел. На- пример, 4 = 2 -1- 2, 6 — 3 + 3, 8 = 3 + 5 и т.д. Несмотря на столетия, прошед- шие с момента выдвижения гипотезы, она полностью не доказана, то есть не стала теоремой. Но и контрпример — четное число, которое нельзя раз- бить на два простых — тоже не найден.

**Задача 190.** Найдите контрпримеры к следующим утвержде-

а) все птицы умеют летать;

6) сумма двух чисел всегда больше каждого из слагаемых; в) все обезьяны живут в Африке.

г) в каждый параллелограмм можно вписать окружность.

*Возможньtй ответ:* а) пингвив — птица нелетающая;

6) если одно из слагаемых — ноль, то сумма равна первому слагаемому; в) есть обезьяны, которые живут в Индии; г) в параллелограмм с неравными сторонами вписать ок- ружность нельзя.

Чаще всего утверждения формулируются мне вообще», а при некоторых условиях, которые считается достоверными.

**Задача 191.** Ваня старше всех прочих мальчиков в классе. Маша младше всех прочих девочек в отом же классе. Ка- кие иа следующих **утверждений верны?**

1. Ваня старше Володи.
2. Ваня cтapme Маши.
3. Маша младше Лены.
4. Лена младше Вани.
5. Володя старше Mamи.

*Замечание.* В таких задачах многое оодразумевается, хотя

не сказано явно. Например, здесь подразумевается, что:

1. Утверждения из условия задачи истинны.
2. Под фразой • утверждение верное» имеется в виду, что ото утверждение истивно независимо от того, как pacпpe- делевы по возрастам все остальные учащиеся в классе.
3. Подразумевается (явво не скаоаво, ятoбьі не аагромож- дать условие), что Володя — **мальчик, Лена** — девочка и что все они учатся в одном классе с Вавей и Машей.

*Peuieuue.* BaHII eTapiiie Bcex npOuHx uansu xoB (a aiiaUHT, H Bonopii). Mama unapiue Beex npouiix peBouex (a oiiaUHT, H Jleiisl). 3iiauHT, yTBepmpeiiHn 1 H 3 HCTHHHhi. Tpii ppyriix yTBepmpeiiiin B£•IaniBaioT couiieiiiin. Hpepnonomiiu (Begs uomeT we Taxoe enyUHT£•Cn), CTO MIliui1 cTapiue BaiiH. Hony- uaeTcn TaKao penouxa

*Bee maxbW Y :u, :pore Banu < Base < Molla < ace ocmaHb-*

*iibte 6eaoz :u*

**3HIIKOM** < Met o6oo au n ‹unapiue» ).

3To tie npoT BopeuiiT ycnoB nM oapauH, HO Banu ninapiue Mains , auau T, Jle sI, a Bonopo meagme Mains. Mai no- CTJ3OHJIH KOHTpnpiiuep x yTBep»tpeiiiinM 2, 4 H 5. 3Tii yTBep-

»ipe n reason cu TaTs Bep siMH.

*Omaem:* 1 3.

**3aga«n** x raaBe 7

**3anana 192. IlOCTJ3OiiTe** oTp paiiiio x cnepyio **iiu yTBep»ipeiiii-**

1. Boxpyr nio6Oro Tpeyrons xa Monro on caTs oxpym-

**HOCTb.**

1. Cy ecTByeT roBpe, xOTOpou iieT ocTpOBOB.
2. Bee xomxn nio6JlT JIOBHT£• Msimeii.
3. Jlio6an co6axil BHnneT xBOeTOM XOTII 6si par B gens.
4. Cy eeTByeT pou6, B KOTOpou piiaroiianii paBiisi.

3a.Dana 193. Bsi6ep Te a) oTp ii,a I; 6) H}3OTHBOnono iiiaie yT- Bep i,qe n x yTBep»t,qe io +JIIo6Oil ilBTOuo6 ns paexo,gyeT **TONAHBO».**

1. Bee uexaiixaMhl, tie paexopyio xe TorinilBO, — tie aBTo-

MO6I4JI14.

1. Bee aBTOMO6IInii pacxopyioT TOHJIHBO.
2. Bee aBTouO6Hn we pacxopyioT TOHJIHBO.
3. He Bee aBTOMO61Inii pacxopyioT TOHJIHBO.
4. He Bee uexaiiiioM£•I, pacxopym iie zonJlHBO, — HBTOM HJIH.
5. XOTII 6s O,O,HH ilBTOuo6xns tie paexopyeT TonnxBO.

Задача 194. В жилых домах, в которых больше 5 этажей, yc- тановлен лифт. Выберите утверждения, которые верны при приведенном условии.

1. Если в доме нет лифта, то в этом доме больше 6 этажей.
2. Если в доме лифта нет, то в этом доме меньше 6 этажей.
3. Если в доме больше 8 этажей, то в нем нет лифта.
4. Если в доме больше 7 этажей, то в нем есть лифт.

Задача 195. Повар испек 50 рогаликов, из них 15 штук он no— сыпал корицей, а 20 рогаликов посыпал сахаром. Выбери- те утверждения, которые верны при указанных условиях.

1. Найдется 10 рогаликов, которые ничем не посыпаны.
2. Если рогалик посыпан сахаром, то он посыпан и корицей.
3. Не может оказаться больше 20 рогаликов, посыпанных и сахаром, и корицей.
4. Найдется 20 рогаликов, посыпанных и сахаром, и ко- рицей.

Задача 196. Виктор старше Дениса, но младше Eгopa. Андрей не старше Виктора. Выберите утверждения, которые вер- ны при указанных условиях.

1. Eгop самый старший из указанных четырех человек.
2. Андрей и Eгop одного возраста.
3. Виктор и Денис одного возраста.
4. Денис младше Eгopa.

Задача 197. Среди дачников в поселке есть те, кто выращива- ет виноград, и есть те, кто выращивает груши. А также есть те, кто не выращивает ни виноград, ни груши. Неко- торые дачники в этом поселке, выращивающие виноград, также выращивает и груши. Выберите утверждения, ко- торые верны при указанных условиях.

1. Если дачник из этого поселка не вьтращивает виноград, то он выращивает груши.
2. Среди тех, кто выращивает виноград, есть дачники из этого поселка.
3. Есть хотя бы один дачник в этом поселке, который вы- ращивает и груши, и виноград.
4. Если дачник в этом поселке выращивает виноград, то он не выращивает груши.