ГЛАВА 3. УРАВНЕНИЯ

Умение решать **уравнения, возникшее** когда-то в незапа- мятные времена, давно етало самоетоятельнъім школьным умением. В главе 2 мы уже использовали уравнения, когда считали, что это поможет решить задачу.

Но вряд ли кто-то сумеет объяснить, зачем в жизни нужно уметь решать те или иные абетрактные уравнения. Вероятно, решение уравнений развивает определенные способности применять етандартные приемы и искать неетандартные. Уравнения школьного курса математики можно раеематри-

**BilTb КБК** }ЗОД РОЛОВОЛОМ КИ .

С другой стороны, решение уравнения представляет еобой прекрасный пример выполнения алгоритма — последователь- ности известных действий, приводящих к цели. По выраже- нию одного математика, решение квадратніях уравнений магия, ооддающаяся проверке. Действительно, безошибочно проведя вычисления по некоторой формуле, мы гарантиро- ванно получаем верные решения квадратного уравнения. При этом можно не понимать, откуда и как получается эта форму- ла (например, ова ееть в еправочвых материалах ЕГЭ или в этой книжке в справочнике и на странице 52).

Ну и, наконец, уравнения удобны для решения задач.

#### Линейные уравнения

Уравнения первой степени — чаще их называют *линейньt- ru уравнениями —* решаютея с помощью простых правил. Нужно добиться того, чтобы в одной чаети уравнения была только переменная (екажем, т), а в другой — только число.

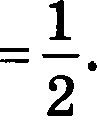
Правила — раскрытие екобок или вынееение за екобки, переное елагаемых из одной части в другую и умножение или деление обеих чаетей уравнения на одно и то же чиело.



Перенос слагаемых из одной стороны в другую можно понимать как добавление к обеим **частям уравнения одного** и того же числа (или вмчитавие числа). В арабском языке эта операция — дословно + воспол- невиеt — называется аль-джабр. Отсюда пошло слово • алгебра• .

Задаиа 75. Решите уравнение 4z — 2 = 0.

*Решение.* Перенесем —2 в правую часть: 4z = 2. Разделим

обечастина2: i=2

### 4

*Ответ:* 1

##### 2’

Задаяа 76. Решите уравнение 3(т — 2) + 4 = —z — 2(5 + z).

*Решение.* Раскроем скобки (главное, не напутать в знаках): 3z — 6 + 4 = —z — 10 — 2z.

Переносим все члены с т в левую часть, а все числа — в правую и приводим подобные:

3z + z + 2z = — 10 + 6 — 4; 6z — —8.

Разделим обе части на 6 и сократим получивюуюся дробь.

8 4

———, ———. 6 3

*Ответ:* 4.

Задаиа 77. Решите уравнение log (2т — 5) = 4.

*Решение.* Конечно, это уравнение не линейное. Мы скажем,

что оно *погарифмическое.* На самом деле первым делом

**МОШНО ИЗ ЇіlВИТЬСЯ** ОТ **ЛOPi1}ЗИфMi1. ДЛЯ ПTOPO ДОСТіlТОЧНО ИС-**

пользовать его определение : 2т — 5 = **34; 2z** — 5 = **81;** z = 43. Как видим, логарифм здесь лишь «запутывающий» эле- мент, причем запутывающий несильно, так как избавле- ние от логарифма не составляет никакого труда.

*Ответ:* 43.

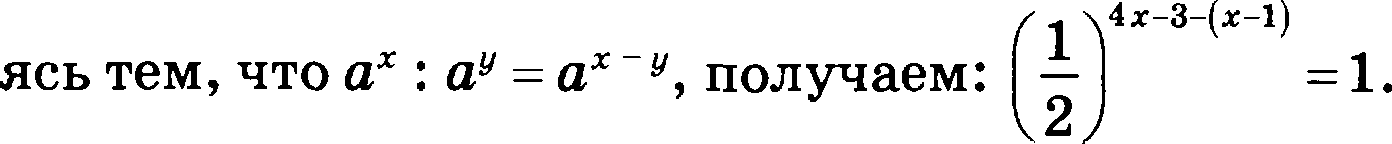
4х-3

Задача 78. Решите уравнение i і ' ' = 1.

—

##### 2 2

*Решение.* Теперь мы скажем, что ото уравнение показа-

*тельное.* Но переход к лииейному очень простой. Пользу-

' Определение логарифма и все остальные необходимые сведения помещены в главе •Справочник› .

Единицу в правой части представим в виде

**няемпоказатели.**

0

1 И m рирав-

—

2

##### 1 „—, 1

2  2 

: 3m-2=0: m= 2.

Как видим, опять же уравнение оказалось «испорченным линейным» .

*Ответ:* 2 .

з

Древние цивилизации придумали уравнения для решения задач, потому что уравнение позволяет работать с неизвест- ными числами как с известными. Эту глубокую математиче- скую идею хорошо иллюстрирует Антон Павлович Чехов в

рассказе «Репетитор» . Ученик VII класса гимназии Eгop Зи- беров (учитель) занимается с учеником Петей в присутствии его отца — купца Удодова.

*Учитель depem задачник и диктует:*

*— «К yneq купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 рук. Спрашивается, сколько аршин купил он moгo и друго- го, если синее стоило 5 py6. за аршин, а черное 3 рук.?» Повто- рите зaдaчу.*

*Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.*

*Для чего же это вьt делите? Пocmoume! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Даите-ка я разделю!*

*Эиберов делит, получает 3 с остатко:ч и быстро cmupaem.*

*«Странно... — думает он, ероша волосы и краснея. — taк же она решается? Т'м!.. Это задача на неопределенные урав- нения, а вовсе не арифметическая»...*

*Учитель* zллбum в *ответьt* u вu6um 75 ii 65.



Наверное, замысел Чехова если и был, то не имел прямого отноше- ния к иллюстрации математических концепций. Не удивляет точноеть, с которой Чехов передает растерянвоеть переонажей, пытающихся бес- смысленно делить одно чиело на другое: ведь врототипом гимваоиста- репетитора Зиберова был сам Чехов.

«Üñfl.. *ClTtpO HNO...* CAOWttf22 b Ü ft 3, a nomos *des umb 540* va *8?*

7’ax, vino sub *Hem, ue* mo».

* *Peuiaíime :›ice! — zoaopum on Meme.*
* *H y, rezo dymaeuib? 3adasa-mo aebb nycma :oaaa! — zoao- pum ¥dodoa Meme. — V :uíi THbi dypa :, 6pameu,! Peuiume y:in 8bL evy, looples:eeuu.*

*loop euceuv depem a pyicu zpuQexb u la vuiiaem peuiamb.*

*On sam:aemc», :paciieem, dnediieem.*

* *Ama nadaba, codcmaeii no zoaop», anze6pauvec :a», — zoao- pum on. — Ee c un:com u uzpe :om peuiuTHb LOS NO. Bnpovem, no:xciio u mas: peuiumb. P, aom, paodenun... noiiumaeme? Tenepb, aom, iiOdO Obtvecmb... noiiumaeme? Han, aom amo... Peuiume aire omy usadaay caen : oaampamy... Modymaíime...*

*Memo erudito yJibtdaemca. ¥dodoa mo:xce ynbi6aemc». O6a onu noiiumamm sameuiamenbcmao ynumero. ¥veiiu : VII :nacca entre ny ui,e* xouQyaumcn, *acmaem* u *va su iiaem* zo#iii22b tte yoko a j/fOA.

* *H 6eo as ze6pbt peuiuNib lo:lícito, — zoaopum Hdodoa, npo-*

*niazuaa i py : y : cvemaM U 83ÓbtXa i. — BOlTi, usaoJlbnie audemb...*

*On ui,en :aem va cvemax, u y neto nonyvaenica 75 u 63, amo u*

HÇW **HO ÓbíAO.**

*— Bom-c... no-i+auiemy, no-i+eyzei+omy.*

МьІ Не зНаем, как решал задачу УдодОВ, но попробуеМ гіредгіоложиТь. ПаТем эТу же задачу МьІ решим по-зибероВСкИ, уравненияМи и сраВниМ Оба сгіособа.

Вероятно, УдодоВ думал Так: ‹Если бьІ купец купил 138 аршиН ТОлько черного сукНа, он заплаТИЛ бы 138 3 = 414 рублей. А оН заплатил на 540 — 414 = 126 рублей бОльше. OТ- чего не сходиТСїt? От того, что сиНее сукно дороже На 2 рубля va apiii H. 126 py6neii paaH H,i›I Ha6em T, ecos xyney xyn T 126 : 2 = 63 apiiiiiiia crucero cyxiia.

3H6epoB, BepoezHO, npe,gnaraeT cuiizazs, uno xynep xyniin z apiu H cHHero y apiuH uepiioro cyx a. Tor,ga oonyuaezce CHC- nena

z + y =138, 5z + 3y — 540,

per **BxOTopym,ooaye x:/-63,p=75.**

МОШНо обойтись одним уравнением, еразу заявив, что чер- ного сукна было куплено **138** — т аршин, а потому

5z + 3(138 — т)= 540.

Сравним эти три способа. Первый способ требует непро- стой арифметико-логической модели: «Если бы... то не схо- дится. А чтобы сошлось, нужно... › Вато еамо решение сводит- ся к делению **126 на 2.**

Второй способ избавляет нас от необходимости думать вна- чале, алгебраическая модель строится легко. Вато требуется умение решить систему.

И, наконец, третий способ — усеченный второй, где первое уравнение уже разрешено относительно у.

Какой способ предпочтительнее? Каждый должен выбрать для себя либо вообще отказаться от решения математичееких задач. Лично автор предпочел бы второй епособ. И не потому, что автор женится думать. Скорее потому, что Виберов прав здесь напрашивается алгебраическое решение. В этой задаче оно естественвое. Насколько правильно предлагать такую за- дачу школьнику, не знакомому е идеей еоетавления уравне- ний? Boпpoc сложный. Скорее правильно, поскольку жизнь предлагает задачи, не епрашивая нас, знакомы ли мы с мето- дами их решения.

**Квадратные уравнения**

В древности *квадратньtе уравнения* возникали из задач, точно так же, как возникают и еейчас. Kpyг задач был, навер- ное, более узким. Но в XXI веке до нашей эры квадратные уравнения уже умели решать. Правда, отеутетвие ясных представлений об отрицательных чиелах долго мешало найти общий метод.

Любое квадратное уравнение можно решить с помощью преобразования, при котором вычиеляетея очень важное чис- ло — дискриминант. В результате получаются всем хорошо известные формулы

*\_ —д — D \_ —b+ CD*

2a 2o

корней квадратного уравнения ат 2 + *bx + с ——* 0. Чиело а не должно равнятьея нулю, иначе уравнение не квадратное.

*D —— b’ —* 4ас — это *#ucкpuзtuнaнвt* уравнения.

От знака диекриминанта зависит чиело действительных корней квадратного уравнения. Если дискриминант положи- телен, то их два, еели отрицателен, то их нет вовее, а еели ра- вен нулю, то корень один.

Дискриминант можно перевести с латыни как «различитель», потому что дис- криминант связан с разностью корней: *D —— (•›—* 1t' . Если бы авторы ста- рых русских учебников перевели слово «дискриминант» на русский язык,

то мы, наверное, говорили бы: «Если различитель уравнения положителен, то оно имеет два различных действительных корня».

Строго говоря, дискриминант имеет не уравнение, а многочлен, стоящий в левой части. Дискриминант есть не только у квадратного трехчлена. У мно- гочленов более высоких степеней дискриминанты также имеются.

Чаето эти две формулы объединяют, используя еимвол +. Этoт знак не обозяачает действие, а лишь говорит, что можно взять минуе, а можно взять плюе, и при этом получаютея два

разных чиела. Таким образом, формула z —

##### 2u

— на ca-

мом деле не формула, а краткая запиеь двух разных формул.

Задапа 79. Решите уравнение z 2 — 6z + 8 = 0.

*Решение.* Найдем дискриминант: *D -—* 62 — 4- 1- 8 = 4.

ТОШНИТ 6 —2 = 2 и 6+2

= 4.

2 2

*Omaem: 2;* 4.

Задаяа 80. Решите уравнение z 2 + 5z — —6.

*Решеиue.* Сначала уравнение запишем в стандартном виде:

z 2 + 5z + 6 = 0.

Дальше решение такое же, как и в предыдущей задаче. Дискриминант: *D ——* 5' — 4 1 6 = 1.

Корни:

1= \_3 и

2

—›+i ——2

### 2

*Omaem:—3;—2.*



Полезно сделать проверку. Мы покажем, как делать быст- рую проверку с помощью *теоремьt Buema:* произведение кор- ней должно быть равно свободному члену: —3 (—2) = 6.

Так и должно быть. Мы почти наверняка не ошиблись.

Обычно этого достаточно.

Чтобія проверить наверняка, можно сложить найденные корни: должен получиться второй коаффициент с противопо- ложным знаком. В нашем уравнении второй коэффициент 5, значит, должно получиться —5. Проверяем:

—3 + (—2) = —5.

Все верно. Если хотя бы в одном из расчетов что-то не схо- дится, лучше остановиться и поискать ошибку.

Обидно, но факт: наибольшее число ошибок на ЕГЭ именно в счете при ре- шении квадратных уравнений.

Задаяа 81. Решите уравнение 332 = 5z + 8.

*Решение.* Запишем уравнение в стандартном виде:

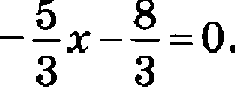
3>2 — 5z — 8 = 0.

Дискримивант равен 52 — 4- 3- (—8) = 121.

5 —11 —i » 5 +11 8 JJ**роверяем произведение:**

6 6 3

—1 8 = —8 . Это не совпадает со свободным членом —8. Но и не

должно: ведь стартий коэффициент равен 3. Если мы разде— лим обе части уравнения на 3, получится т 2  Теперь видно, что все в порядке.

Omвent: —1 и 3

Принято **говорить, что** если дискриминант квадратного **уравнения равен нулю, то уравнение** имеет один **корень.** Это не совсем так. Проведем аналогию: Маша и Саша — два **разных человека,** но Naшa встала перед Сашей, и Сашу не видно. Они **есовместилнсь», но от этого** Саша не исчез. Их по-прежнему двое, хотя кажется, что один. Так и **совпавшие** корни — кори я даа, но они **совместились** в одной **точке.**

Задача 82. Решите уравнение z' —16a = —64.

*Решение.* Преобразуем уравнение: т' —16a + 64 = 0. Дис- криминант: 16' — 4 64 = 0. Два совпавших корня, которые

получаютея из общей формулы отбрасыванием *+D:* 16 = 8.

##### 2

Можно было бы записать в ответе два числа: 8 и 8. Но все же обычно корень пишут один раз.

*Ответ:* 8.

**Неполные квадратнь›е уравнения**

Квадратное уравнение называют неполным, если второй или третий коэффициенты равны нулю. Выглядит это так, как будто в уравнении чего-то не хватает. Наверное, поэтому его и называют неполным.

Задача 83. Решите уравнение z' —16 = 0.

*Решение. Твояцвет. х’ ——* 16. Должно быть два корня. Оче- видно, —4 и 4.

*Ответ:* —4 и 4.

#### Задаvа84.Ретитеуравнение2і'-5і=0.

*Решение.* Пдесь свободный член равен нулю. Вынесем т за скобки: т(2т — 5) = 0. Уравнение «разваливается» на два

линейных: z = 0 или 2z — 5 = 0, откудai=-5.

### 2

*Omaem:* 0 *п* — .

2

Всякое неполное квадратное уравнение можно решить по общим форму- лам, но это странно. Например, задачу 83 можно было решать так. Дискри- минант равен 0’ - 4 • (—16) = 64. Тогда формулы корней дают

—0—8 —4 и —0 + 8 — 4.

2 2

Выглядит такое решение нелепо, но может пригодиться для самопроверки.

## Линейные уравнения,

**которые «прикидьтваются» квадратныни**

В банке экзаменационных задач можво найти такое урав- нение.

**3aдaяa 85.** Решите уравнение (т —3)' т'.

*Решение.* Вторая степень на месте. Но возведем левую часть в квадрат: т' — 2- т- 3 + 9 = z'; —6s + 9 = 0.

Вторые степени взаимно уничтожились. Уравнение оказа- лось линейным.

*Omaem:* 3

##### 2’

Возникает искушение в уравнении (т —3)’ т' сразу ‹•уда-

лить квадраты t слева и справа. Давайте попробуем: т — 3 = z. Получается —3 = 0. Икс пропал. Решение потерялось. Поду- майте, почему так получилось.

# Квадратные уравнения,

**которые «прикидываются» линейныни**

Рассмотрим обратную ситуацию.

Задача 86. Решите уравнение (2т —1)' = (3 —z)’.

Чем-то это уравнение напоминает предыдущее. Мы уже

**ЗПП€ІМ, ЧТО П]ЗОСТО** « СНИМІІТЬ **КВВ,ДЈЯ1ТЬ14 ОПilCH** О. **Ї\/ЇОШНО BOC-**

пользоваться формулами сокращенного умножения: 4z' — 4z + 1 = 9 — 6z + **т2; 33 2** + 2т — 8 = 0.

Дальше решение обычное: дискриминант равен

4 + 4- 3 - 8 = **100.**

##### Еорни

—2+10 \_ 4 —2 —10 =—2.

6 3 6

*Д pyгo’u способ.* Перенесем все члены в левую часть, чтобы получилась рааность квадратов, а затем преобразуем оту разность квадратов:

(2x —1)' —(З— x )2 = 0;

(2z —l—3 + z)(2z —1+ 3 — z) = 0; (3z — 4)33 + 2)= 0.



##### Уравнение ‹распалось•: 3z — 4 = 0 или *х +* 2 = 0, откуда

*х ——.*4 или z = —2.

*Ответ:* 4 —2.

# Задачи к главе 3

Задача 87. Найдите корень уравнения 4 — 2z — —4x *+* 5.

Задача 88. Найдите корень уравнения 5 — 2z = 8z + 9.

Задача 89. Найдите корень уравнения —2(—5 — 3z) — 5z = —2. Задача 90. Найдите корень уравнения 4

Зада•та 91. Найдите корень уравнения i 4m+1 і'" i

4 4 16

Зада•іа 92. Найдите корень уравнения log (3z +1)= 4.

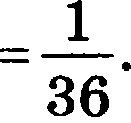
Задача 93. Найдите корень уравнения loв 1

4 2

Задача 94. Найдите корень уравнения

—3 = —1.

log (2z —13)+ log 7 = log 14.

Задаяа 95. Найдите корень уравнения 6“" 

Задача 96. Решите уравнение z' — 7z = 18. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Задача 97. Решите уравнение z' + 3z — 18 = 0. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Задача 98. Найдите корень уравнеяия 5331+1 = 4.

8адача 99. Решите уравнение z' = 9. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Задача **100.** Решите уравнение z' + 4z = 0. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Задача **101.** Найдите корень уравнения (3z —6)’ — 9s’ = 0. Задача **102.** Найдите корень уравнения **(т —12)2 =(z —14)'.**

’