*РегнонапьньІіі этап, 2015—2016 учебнъій гоg. Второй ,qень*



УСЛОВИЯ И РЕLПЕНИЯ ЗАДАЛ

9 класс

* 1. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик

ЭТОГО КЛіІСС t ОДИН ]ЭіІЗ П]ЭНЗДНОВАЛ ДЕНЬ ]ЭOШДeHИЯ, **HiI** КОТО]ЭЫЙ

пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассни—

КИ. ОГЛО ЛИ ОКІІЗіІТЬСЯ , ЧТО К tЖДЫЙ ДB t ЧННИК ( ЭТОГО КЛіІС- С t BCT]ЭeTИЛИCЬ **HII** ТІІКИХ П]ЭНЗДНОВАНИЯХ OДИHi1KOBOe ЧИСЛО ]ЭІІЗЄ

(Считается, что на каждом празднике встретились любые два

гостя, а такое именинник встретился со всеми гостями.)

Ответ. Да, могло.

Первое решение. Предъявим пример, как такое могло

П]ЭОИЗОЙТИ. ЫСТ]ЭОИМ Чі НИКОВ ПО К]Э Г . ]ЭeДПOЛOШИM, ЧТО К

каждому на день рождения пришли все одноклассники, кроме следующего за ним по часовой стрелке. Тогда любые два учени- *ки А п В* встретились на всех празднованиях, кроме двух: того, на которое не пришёл *А, н того,* на которое не пришёл *В.* Зна— чит, любая пара учеников встретилась 21 раз.

Второе решение. Предъявим другой возможный пример. Выделим из класса двух учеников *А п В.* Пусть на день рожде— ния к *А* пришли все одноклассники, кроме *В,* на день рождения *к В* пришёл только *А, в* на остальные дни рождения приходил только *В. for рь любья* пара, в которой нет *В,* встретилась толь— ко на дне рождения *А, в* все пары, содержащие *В,* встречались ровно по разу на остальных празднованиях. Итого, каждая пара

ВСТ]Э€)ТИЛ (Cb ]ЭОВНО ПО ]ЭНЗ .

Комментарий. Только отве—т 0 баллов.

Приведён правильный пример, возможно, без обоснования или с неверным обоснованием— не менее 5 баллов.

* 1. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество *А,* co— стоящее из натуральных чисел, полнЬіж, если для любых нату— ральных п и *b* (не обязательно различных и не обязательно ле— жащих в Я) таких, что п + h лежит в *А, чпcлo ab* такое лежит

XLJJ *Всероссігйская* математическая олігхттнгада тігіголыпгігов



в *А.* Найдгіте все гіолные множества натуральных чгісел.

*(Н.* Я зптонов)

Отает. Множество всех натуральных чгісел, а такое мно- жества (1}, (1, 2}, (1, 2, 3} rt (1, 2, 3, 4}.

Реіиение. Для начаа провергім, что хтнотества (1), (1, 2),

(1, 2, 3}, (1, 2, 3, 4), а также множество всех натуральных чп— сел полные. Для последнего мнотестаа это очевггдно; для nep- вых четырёх заметгім, что если натуральные чгісла п и h таковы, что о + h 4, то либо oгiri оба равны 2, либо одно гіз нгіх равгіо 1; в ліобом гіз этгіх случаев имеем nh п + h. Ѕиачгіт. если п + h Е *А,* то u oh С *А.*

Нусть тегіерь *А—* произвольное гіолное множество. Еслгі *А* содержит некоторое число *k р+ 2, no по* условию оно такое co- дepmuт чгісло *I - (k I) — k — I.* Нродолтая этот процесс, по- лучаем, что все натуральиые чгісла, не гіревосходящгіе *k,* лежат *в А.* В частностгі, еслгі Я не содержит чисел, большгіх 4, то мно- жество *А* уже гіеречгіслеио в ответе.

Нусть теперь в Я есть чгісло Р р+ 5. Ѕададим последователь- ность фу, 32 , . . . соотношенгіяхш фу = є, Pp+ i 2(Pp — 2). Все этп числа лежат в *А.* Деііствгітельно, і летгіт в Я по нашему гіред- гіоложегігпо, а если Pp 2+ (èp —2) С *А,* то и You = 2(Pp —2) е *А.* Кроме того, t u — + (Pp — 4); по гіндукции теперь получаем,

что Pq+ ј Pp 5. Значгіт, для ліобого натурального п имеем

èp п; из paccympeririii предырущего абзаца понгімаем тегіерь,

# что и п С *А. Нхьк,* все гіатуральные числа лежат в Я.

Комментарий. Верный отве—т 1 балл.

Доказано, что вместе с любым числом полное мнотестао

содержгіт все мегіыиие ег—о 2 балла.

Доказано, что полное множество, а котором есть чгісло,

большее 4, содержит бесконечно много чгісе—л 2 балла.

В peiueнriri угіущен оргін гілгі несколько из ответов— rie более

# 5 баллов.

* 1. В белоіі таблгіце 2016 х 2016 некоторые клетки окрасилгі чёр- ным. Назовём гіатураьное чгісло *k уdаннъtм,* если *k р+* 2016, п в каждом ггз клетчатых квадратоа со стороноїі *k,* располотенных а таблице, oкpaiueгio ровно *k* клеток. (Натіример, если все кет-

# 6

*РегнонапьньІіі этап, 2015—2016 учебнъій гоg. Второй ,qень*



ки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наи- большее количество чисел могут быть удачныМи? (€. homeв)

Ответ. 1008 чисел.

Решение. Рассмотрим произвольное окрашивание табли—

цы. Пусть нашлось хотя бы два удачных числа, и п— наимень-

шее из них, а —h наибольшее.

Поделим h на о с остатком: *b qa+ г,* где 0 г < о. Предпо— ложим, что g 2. В произвольном квадрате h х h можно располо— жить q2 непересекающихся квадратов п х п. В этих квадратах бу— дет ровно q2 n чёрных клеток. Однако q 2 o (g + 1) п qn + г — h; значит, в квадрате h х h будет больше, чем h чёрных клеток, что

невозможно. Итак, g 2, то есть h 2n.

Общее количество удачных чисел не превосходит количе— ства натуральных чисел от п до 6, то есть оно не больше h — п + 1 h — h/2 1 = h/2 + 1 1009. Значит, это количе— ство не больше 1008.

Осталось привести пример раскраски, для которой найдутся 1008 удачных чисел. Окрасим чёрным все клетки 1008—й строки и только их. Рассмотрим произвольный квадрат со стороной d

1009. Он пересекается с 1008—ой строкой, значит в нём есть целая строка отмеченных клеток, то есть их как раз *d* штук. Значит, все числа от 1009 до 2016 являются удачными, и таких чисел как раз 1008.

Комментарий. Только отве—т 0 баллов.

Приведён пример с 1008 удачными числами— 2 балла.

Доказано только, что удачных чисел не больше 1008 4 бал—

# Дан выгіуклый четырехугольник *ABCD,* в котором *Z DAB*

90°. Пусть *М—* середгіна стороны *BG. Окьзьлосъ. ч+о Z AD С —— Z В АМ.* Докажите, что *Z ADB —— ZСАМ. (Е. Бакаев)*

Нервое решеііііе. На гіродолтенгігі отрезка *AB зь* точку *А* отметгім точку К так, что *AB АИ (cxi.* pric. 1). Тогда *АМ* средняя лгігігія в треугольнике ФUN, откуда *АМ CK.* Ѕначгіт, *ZBKO ZBAM Z ADB. Охстрв* следует, что четырёхуголь- нгік *AKDC* впгісан.

Опять нe гісгіользуя гіараллельность *АМ н CK,* получаем

*ZС АМ —— Z ACK —— Z ADK.* Наконец, *DA—* медгіана п высо—



Ta B +peyronaHriKe *B DK,* rioo+OMy *D A* ftBnse+cs ri 6ucceK+pricoii;

*oxcmao Z ADB* = *Z ADK* = *ZC'AM,* zoo ii +pe6oaanoca noxaoa+a.

Pric. 1 Piic. 2

Bzopoe peiueiiiie. 3axie+riM, zoo *Z ADD ZDAM*

= *Z B AM Z D AM ——* 90°; zoo ouauri+, zoo *AM CD.* OHyCTHM

iiepiieHprixynopni *MN u B P uz* +ouex *M u B* HH ri HMyIO *C D,-*

+orpa +ouxri *A, M u N* nema+ HP OQHOii n HMOI1 (CM. HC. 2) .

Hocxonnxy *BM —— MW, no* +eopeMe &aueca rionyuaeM *PN*

*—— N C. 2 u avux, AN—* Baico+a ii MeqriaHa B +peyront.HriKe *APC, ox—*

xyna UAM — MAfi. Tax xax *B P AN,* riouyuaeM MAP

= *Z APB.* Haxorieu, nOCKOHhxy *Z B PD —— Z B AD ——* 90°, ue+aip x— yronnHHK *AB PD* ariHCilH; HOo+oxiy *Z APB —— Z ADB.* Hoax, ›in rionyurinri, zoo *ZCAM —— SMAP —— Z APB —— Z ADB, zoo vi* +pe— 6oaaoca.

Tpezne peiueiiiie. O+uomriM HH 

eyre *AM* +O'4Ky Q TEK, zoo *AQ*

*— 2 AM (cri.* pric. 3). TOFQa B me+u-

p xyrONL.Hrixe *AB QC puorou u* pe— *M *

nance +ouxoii nepeceueHrio noriouaM,

+o ecus OH— napannenorpaMM; 3ia—

zo+, *ZGA Q — Z AQB. " D*

Tax xax QA *AB,* rionyuaeM PHC.

QA *AD.* Tax xax *ZQAD —* 90° — *DBA Q —* 90° — *Z ADD,*

xxieexi *DC AQ.* 3Hd'iii+, U TO'lKa nepeceueHxs BnicO+ B +pe—

yronnHiixe *AQD,* o+xy,qa *AC' Q D (u,* 3HII'iri+, *B Q QD) .*

OCKONL›Ky *Z B AD —— Z B QD ——* 90°, ue+aip xyrONL.HHK

*AB Q D* BHHCdH. 3HauHT, *Z ADB —— Z AQB —— ZCA Q, zoo u* +pe6o—

B (OCL• QOK£(3INTL..