

10 класс

* 1. Назовём непустое (конечное гілгі бесконечное) кіііожество *А,* co— стоящее ru рействгітельных чисел, полньtт, если ,для ліобых ,цей— ствительных п п *b* (не обязательно разлгічных п не обязательно лежащих в *А) твкнx, чтo а+ b* лежгіт в Я, число nh такое летит в *А.* Найдите все полные множества ,цействительных чисел.

*(Н.* А зптонов)

Ответ. Такое множество oдuo: это множество всех ,цей—

ствительных чгісел.

Нервое peixieiiiie. Нусть *А—* полное множество. Посколь— ку оно непусто, то можио выбрать элемент п С *А.* Тогда п + 0

— п С *А,* значит, п 0 — 0 С Я. Так как (—т) + т — 0 С *А,* гіолу—

чаем теперь, что (—т-)

т —т 2 С *А* npri всех действительных т.

В сгілу гірогізвольгіости выбора т отсюда сле,qует, что любое от— рицательное чгісло также пргіна,цлежгіт множеству *А.*

Наконец, для любого h > 0 ггз того, что чгісло (—h) + (—h) —

= —2h лежит в *А,* получаем, что h2 (—h) (—h) С *А.* Значит, и прогізвольное гіолотительное чгісло такое летгіт в *А. Ихьк,* в *А* входят все действительные числа.

Второе peiiieiiiie. Как и в гіервом реіііении, выберем ripo—

извольный элемент s С А. Докатем, что ліобое t 0 летит

в *А.* Рассмотрим уравиение т 2 — sт + t = 0; его ,qискриминант неотрицателен, так что оно гікіеет ,два (возможно, совпадающих) корня п п h. Тогда no теореме Вгіета гімеем п + h = t п nh = s. Поскольку п + h = *s С А,* гіолучаем, что и t С А.

Осталось показать, что ліобое u 0 также лежит в *А.* Но доказанному выше, (—u) + (— 1) С *А, зньчпх, н (—и)- (— I) — и* также лежит в *А.*

## Комментарий. Только отве—т 0 баллов.

Доказано только, что полное множество содержит все отргі—

цательные (гіли все негіолотгітельные) чгісла 3 бaллa.

* 1. Внутри равнобокой трагіецгігі *AB C!D с* основаниями *BG п AD* расположена окружность с центром I, касаіощаяся отрезков *AB, О D п D А.* Окрутгіость, оііисанная около треугольника *BIC,* вторгічно пересекает сторону *AB* в точке N. Докажите, что прямая *НE* квсьехся окружности ш. (fi. Обртов)

Peiiieiiiie. Наметгім, I лежгіт на ocгi сгімметргігі трагіецгігі, гіоэтому *MIND —— ZIBA.* Пользуюсь впгісанно— стыо четырехугольника *CBEI,* получа— ем *MIND —— ZIBA —— ZIBE —— LIKE.*

Так как прямая *CD* касается окружио— сти m, то п гірямая *НE,* сгімметричная ей относгітельио Uf, также касается m. Намечангіе. Есть п ,qpyrrie реше— ния, например, с гіспользованием pa—

венств *ZIEA —— ZICB —— ZIB С —— HEТ.*

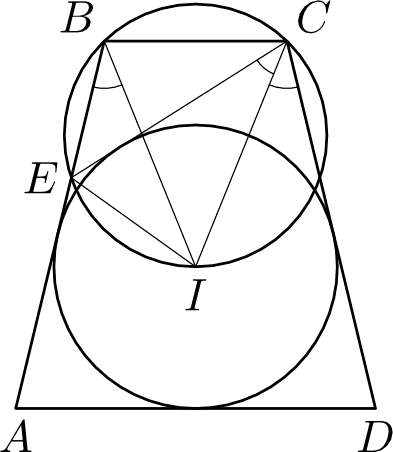


Рис 4

Комментарий. Ноказаио, что точка I лежит на ocri сим—

метргігі трагіецгігі, гіли эквивалентные проqвгіжегігія— 0 баллов.

* 1. По кругу стоят п мальчгіков и п ,девочек. Назовем пapy из маль— чика и девочкгі *хорошей,* еслгі на одной ru ,цуг меж,цу нгімгі стогіт ііоровну мальчгіков и ,девочек (в частностгі, стоящие рядом маль— чик п девочка образуют хорошую пapy). Оказалось, что есть де— вочка, которая участвует ровно в 10 хороших пapax. Докажите, что есть п мальчгік, который участвует ровно в 10 хороших пa—

pax. *(Н. Власова)*

Peiiieiiiie. Заметим сразу, что на лmdoй дуге между члена—

ми хороіііей ііары ііоровну ,девочек и мальчиков.

Нусть *D—* девочка, участвуіощая в 10 хороших парах. Обо—

значим всех детей по часовой стрелке <і <2 2n \*•<› \*\*

<і это *D, п* гіроролтим нумерацгно цгікгіческгі (например, N0 = N2n и N2л+1 N1). Нри i = 1, 2, . . . , 2s обозначгім че— рез *d;* разность мem,qy колгічествами ,девочек и мальчиков cpe— fi> i 2 N;; В частности, *d i* = 1 — 0 = 1 и *d z* = 0 (поэтому можно проролжгіть эту последовательность, полагаю *d z + i —— d(* и т. д.). Девочка *D* образует с N; xopouiyio пapy тог,ца п только

тогра, кoгдa *d;* = 0 п К;— маьчгік, т. е. *d;* = 0 п *d;—* i <•••.

найдутся ровно 10 гіидексов / с такгімгі свойствами.

Рассмотргіы ліобого мальчика *М — И ,* образуіощего с *D* хорошуіо пару; тогда *dz ——* 0 и *d, —* i = 1. Аиалоггічно гіолучаем, *sівльчнк М* образует xopoiiiyio riapy с N; ровно тог,ца, когра *d*

— *d;* и К; девочка (то есть *dl* — 0 п *d;* 1).

Наметгім, что ліобые два числа *d; п d;* отличаіотся на е,ци—

10

## нгіцу. Разобьём rix на группы гіоследовательных чгісел, не меиь— ших ериницы, п гругігіы гіослеqоаательных чгісел, не бfiльших нуля. Torqa ripri обхоре круга по часоаоіі стрелке «гіерехоров» ггз первых rpyriri во вторые будет столько же, сколько п «nepe— xopoa» из аторых групп в гіераые. Значит, у *М сколько* нe xo- рошгіх нагіаргігіц, сколько у *D* хороіішх напарнгіков. Это и тре— боваось доказать.

*d,*

п п д м м д м м м д д м

Pric. 5

Замечание 1. Это реіиенгіе можно агізуалгізироаать, на- ргісовав ‹графгік» гіоследовательностгі *(d;)* (см. рис. 5). Тогда появленгге xopoiuero напарника у *D* озгіачает, что график пере- секает гірямую *d —* 1/2 сверху вниз, а появленгіе xopoiueй напар- нгіцы у *М—* пересечегіііе той же гірямоіі снизу вверх.

Замечание 2. Hз реіиения следует, что, если реаочка o6- разует хорошуіо napy с двумя мальчгіками, то ліобая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её п с друггікі. Нолее того, все дети разбгіваіотся на негіересекаіо— щиеся гругігіы (в кampoii rpyririe поровну мальчиком и девочек) так, что каждый маьчгік образует xopoiuиe гіары со всемгі де— вочками ггз своеіі гругігіы u только с ними, и то нe верно для ліобой девочкгі. Нри этом, при обходе по кругу мальчгікгі и де— вочки ггз орноіі группы череqуются.

Существуют реіиения, роказывающие этот факт напрямую (нагіргімер, гігідукцией по числу детей).

# 108

Ответ. ('\*• F)

(2, 0) \* ('\*• F)

(0, 2).

Решение. ,Qля удобства сделаем замену т — 2o и р — 2h. Тогда из условия имеем (2n)100 (2h)100 2” (2o 2h) и



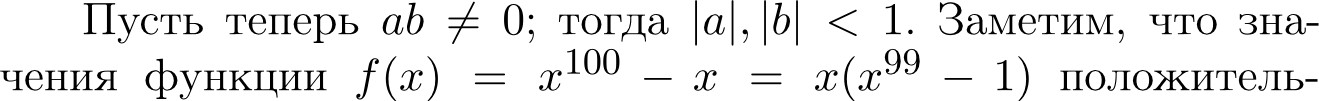
(2n)200 *(2b) 200* 2"' (2n — 2h). COK hTHB 06a paBeiic+Ba Ha

c+erie ri paoiixu, nonyuaeM 100 $100 200 \_ $200 — h 0. HopenriB B+opoe Baipameurie Ha nepBoe, nonyuaexi 100 100

3HHUii+, xam,qoe rio nicer o ri h riO Mo,qyuio He ripeBocxonriT 1.

Ecnri h = 0, +o 100 ypa n = 1. AHanorxuHo, ecnx

n = 0, TO b = 1; CTO H HBOQH+ K QByM o+ae+au (z, p) (2, 0) ri

(z, /) = (0, 2).

HhI ripx z C (— 1, 0) ri o+priua+ennHhi ripx z C (0, 1) . OCKOnnKy

100 \_ $100 h, riMeeM /(o) — /(h), rioo+OMy uiicna n ii h iiMe—

IOT OQHHIIKOBL•IPf HHiIK.

Q yFOii CTO OHL›I,

# q ioo \_ ¿ioo ,99 ,98, q97(2 99 „)

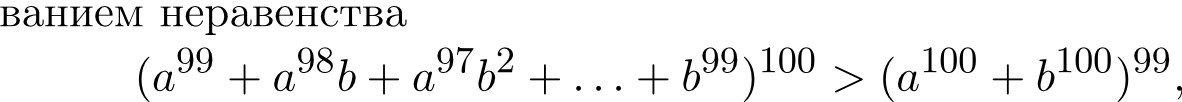
Ecnri o ri h o+priua+ennHL.i, +o ripaaas raBces (+) Maxine o+piiua—

+enL.Hit, zoo HeBooMOWHO. Ecnx we n ii h nonomri+enniiL.i, +o Bce

cnaraerBinie rrpaBOii uac+ri (i) rionomri+enaHhI, iioo+OMy OHa 6ona—

rue, men n” *b’ S ,’* riTilK, O” h” 1. C ppyroii c+opOHhi, no— cxonaxy 0 n , h) 1, rixieeM o” $99 p100 $100 p

+iiBopeurie.

Haivieuaiiiie. Hocne riouyueHrio HepaBeHc+Ba (+) peiueHue MOmiio aaBepiiiri+a paouai iii crioco6axiri — iiariprixiep, c ricrionaoo—

cripaBepnilBOro npii nh 0. two HepaBeHc+BO MOWHO poxaoa+a, pacxpnia cxo6xri ri yc+aHOBHB, zoo xoocbcbiiyueH+ ripii uio6oxi on— Houne e cneBa we MeHniiie, ueM xoo‹Q‹QriurieH+ ripri +axoM we opHO— uneHe cnpaBa.

Koiviveiizapiiii. TOunxo o+Be+ — 0 6dNNOB.

Hepexop o+ nicer z if § K uiicnaxi o = 1/2 ri h = p/2 0 6an—

FOB

OKftHIIHO, zoo ueHyneBaie uxcna z ri p ue storys rixie+n paoHnie

3HHKH — 3 6auua.

OKftHIIHO, zoo ueHyneBaie oncea z ii p He storys rixie+n opriii 3HHK — 3 6auua.