*РегнонапьньІіі этап, 2015—2016 учебнъій гоg. Мервыіі ,qень*



УСЛОВИЯ И РЕLПЕНИЯ ЗАДАЛ

9 класс

# Даны квадратные трёхчлены ii (=) /z(=) /ioo(=) с одинако—

выми коэффициентами при т2 , одинаковыми коэффициентами при т, но различными свободными членами; у каждого из них

есть по два корня. У каждого трёхчлена /;(т) выбрали один ко— рень и обозначили его через т;. Какие значения может прини—

мать cyMMa 32( 1) 33(\*-2-)-+

Ответ. Только 0.

+ 3100 ( 99) + 31 (\*100)

*(Н.* Азптонов)

Решение. Пусть *i—й* трёхчлен имеет вид /;(т) — пт 2+hт+c;.

Тогда

/2( 1)  

поскольк ii (» і ) — 0. Аналогично получаем равенств• /э f=z) —

' СЗ C2 - - - › 3100( 99) ' C100 С99 31( 100) ' CJ — C1 0-0

Складывая полученные равенства, получаем

/2(=i) + /з(=z) + + h(\*too) = ( — i) + + ( i — ioo) = о

Значит, единственное возможное значение суммы— ноль.

Комментарий. Верный ответ без обоснований— 0 баллов.

* 1. Дан равнобедренный треугольник *ABC, AB —— BC.* В окруж— ности П, описанной около треугольника *AB С,* проведен диа— метр UU'. Прямая, проходящая через точку U' параллельно *BC,* пересекает отрезки *AB п AC* в точках *М п Р* соответственно. Докажите, что *М* середина отрезка U'P. (fi. Об9тов)

Решение. Так как UU' *В*

диаметр П, имеем ЛU'ЯU = 90°. Поскольку *М Р BC,* получаем *CMРА — ZBCA — ИВАН* (см.

# рис. 1). Значит, треугольник *AMP*

равнобедренный, и поэтому его высо-

*хь MD* является и медианой. Так как *А Р*

*AD — DР н AT' DM, по* теореме

# Фалеса получаем, что *С'М —— МР.* Рис. 1 Замечание. Есть и другие решения, например, с исполь—

XLJJ *Всероссийская* математическая олихтпиада школьников



# зованием подсчёта углов в прямоугольном треугольнике *PAC'’,*

именно, *ZMAC' ——* 90° *— ZMAP ——* 90° *— Z ACB ——* 90° *— ZMPA*

*Z MO'A,* откуда *М Р —— МА —— MC'.*

* 1. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего красного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

*О. Дмитриев, Р. Шенодаров)*

Ответ. Нет, не может.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим степени двойки, на которые делятся выписанные числа; пусть 2k*— пьн—* большая из них. Если хотя бы два выписанных числа делятся

на 2L , *no* два соседних таких числа будут различаться на *2 k .*

Значит, одно из них будет делиться на *2k ’ ,* что невозможно в силу выбора *k.* Значит, среди выписанных чисел ровно одно

делится *пь 2 k .*

Наименьшее общее кратное (HOK) группы, содержащей это число, будет делиться на *2k , ь* HOK оставшейся группы— не будет. Значит, сумма этих HOK не делится на 2L , *с* другой сто— роны, эта сумма больше, чем *2k .* Поэтому эта сумма не может быть степенью двойки.

Комментарий. Доказано, что ровно одно из выписанных чисел делится на максимальную степень двойки— 2 балла.

* 1. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, . . . , 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. ha один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и про— демонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!) . ha какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого? (If. fiозdпнов, N. Снов)

Ответ. ha 2 загрузки.

Решение. Покажем, что Архимеду достаточно использо—

вать мешок дважды. Пусть он сначала положил в мешок слит-

# 6

*РегнонапьньІіі этап, 2015—2016 учебнъій гоg. Мервыіі ,qень*



ки с весами 1, 2, 3 и 5 кг, а потом — слитки с весами 1, 4 и 6 кг.

# В обоих случаях мешок не порвётся.

Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды был использован слиток веса 1 кг. Действительно, если бы Архимед в эти два раза вместо слитков с весами 1, . . . , 6 кг использовал соответственно слитки с весами юі 6 КГ, ТО эти веса удовлетворяли бы системе неравенств і + + з +

+ 5 1› 1 4 6 <•• ады вая эти неравенства,

получаем ю + ( і + + + 6) р+ 22. В скобках стоит сумма шести различных натуральных чисел, то есть она не меньше 1 + 2 + . . . + 6 = 21. Отсюда следует, ч• і 22 — 21 = 1. Значит, ю = 1, то есть слиток веса 1 кг однозначно определён. Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Архимед загрузит один слиток, то мешок не порвётся в любом случае, то есть никакой слиток идентифицировать не удастся. Пусть Архимед загрузит больше одного слитка, и мешок не по- рвётся. Если слиток в 1 кг не загружен в мешок, то при замене им любого слитка из мешка результат не изменится; значит, в этом случае Гиерон даже не сможет понять, находится ли этот слиток в мешке. Если нe искомый слиток в мешке, то Гиерон не

# сможет понять, какой из (хотя бы двух) загруженных слитков

требуемый.

Замечание. После указанных двух загрузок такое одно- значно определяется группа гирь с весами 2, 3 и 5 кг, а также группа с весами 4 и 6 кг.

# Комментарий. Доказано только, что одной загрузки меш—

ка недостаточно— 1 балл.

Приведён только верный пример двух загрузок, но не дока— зано, что он работает 3 балла (эти баллы могут складываться с предыдущим).

# Приведён верный пример двух загрузок, доказано, что он работает, но не доказано, что одной загрузкой не обойтис—ь

6 баллов.