

11 класс

* 1. Квадратный трёхчлен /(т) = пт2 + hт + с, не имеющий корней, таков, что коэффициент h рационален, а среди чисел с и /(с) ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена Ј(т) быть рациональным? (f. фpкoв)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Так как трёхчлен /(т) не имеет корней, то с

/(0) 0 и /(с) 0. Тогда выражение

отношение рациональногоии

иррациональнокак

D 2 + 0 + D

# \*8+ l Так как Ь+ 1 рационально, то uc

— иррационально. Получаем, что дискриминант *D b2 —* 4ос иррационален как разность рационального и иррационального ЧИсел.

# Комментарий. В целом верное решение не проходит, если

с — 0 и/или /(с) — 0 6 баллов.

* 1. Положительные числа т, р и с удовлетворяют условию трс тр + pz + ст. Докажите неравенство

Решение. По неравенству о средних имеем

*( А . Х рабров)*

тр + тс 2 тр- тс, *ю у+ yz* 2 *лг-у yz, :rz + yz* 2 *х - yz.*

Сложим эти три неравенства и разделим полученное на 2. С

ЧСТОМ СЛОВИЯ, ПОЛ ЧIIi М

Деля полученное неравенство на *:ryz,* получаем требуемое.

Замечание. Это решение легче придумать, если перепи— сать данное и требуемое неравенства в виде + 1 + р€ 1 и

1   <1

* 1. В треугольнике *AB С* проверена биссектриса *BL.* На отрезке *CL*

аыбрана точка *М.* Касательгіая в точке *В п* окружности Н, onu- санноії около треугольника *ABC,* пересекает луч *СА* в точке fi.

HC (TeЛhHЫe В ТОЧКІІХ *М Н* ОК]Э ЮНОСТИ Й , ОПИС i ИНОЙ OKO-

so +peyronaHHKiI *BTM,* riepeceKaioTCs B +ouKe Q. Qoxamii+e, u+o rrpovaie PQ rr *BL* riapannennHhl. (fi. N9eueqoa) Peiueiiiie. Tax xax *BL* 6riccex+puca *Z AB C,* riMeeri

*Z ABL Z LBC.* Hocxouaxy *PB* Kaca+euaHu K n, zMeeM

*Z PBA —— ZBCA (cx.* pric. 4). KpoMe Toro, *Z PBL —— Z PB A*

*Z ABL ABCA* A&U &AP, Aua +, *ABPM* = 180°

*(Z PBL Z BLP) ——* 180° *— 2 Z BLP. Oxcmpo* cnepye+, a uHCTHO-

ccii, u+o &Afi oc+pairi.

Pric. 4

Tax xax *Z BTM ——* 180° — &Afi +yrioii, xaca+enaiit.ie K F B

+ouxax & ri *M* riepecexaio+Co B +ouxe Q, uemaiueii no +y we c+o- pony o+ *BM, zoo u xovna L (d* 3Hh'iri+ no +y we c+opOHy, zoo u P). Qanee, riMeeM *QBD* — *Z QMB —* 180° *— Z BLM — Z BLP.* Siia ii+, *CB QM* = 180° *— 2ZQBM* = 180° — 2 *BAP* = *CB PM.*

Hoo+oriy +ouxri *B, M, P u Q* uema+ HH OQHOii oxpymHOCTu. O+- ciopa cnepye+, zoo *ZQPM —— Z QBM —— Z BLP.* two ii osiiauae+, zoo PQ *BL.*

KommeHzapiiii. Qoxaoauo, zoo ue+aip xyrONL.HHK *B P QM*

BHHCIIH— 3 6anna.

Nagara caeneria x poxasa+euac+By BHHCi1HHOC+u ue+nip x- yFONL›HHKa *B P QM 2 6anno.*

OKHoiIHO, u+o +oPuxii

0 6aNNOB.

rt Q nema+ c OpHOii c+opOHhI OT *B M*

da o+cy+c+arie o6oCHOBilHris paciionomeHris +ouxri Q 6HHnni He

CHHLIftIOTCf(.

114 Есть клетчатая доска 2015 х 2015. Дима ставит в k клеток по де— тектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500 х 1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантирован— но восстановить расположение корабля?

*О Дмитриев, Р. Женодаров)*

# Ответ. *k* 2(2015 — 1500) = 1030.

Решение. Покажем, что 1030 детекторов Диме хватит. Пусть он расположит 515 детекторов в 515 левых клетках сред— ней строки квадрата, а остальные 515 детекторов— в 515 верх- них клетках среднего столбца. Заметим, что при любом поло— жении корабля его левый столбец лежит в одном из 516 левых столбцов доски. Если этот столбец— один из 515 самых левых, то корабль накроет детектор из этого столбца, лежащий в сред— ней строке, иначе ни одного детектора из этой строки корабль не накроет. Значит, по показаниям детекторов из этой строки восстанавливается, в каких столбцах лежит корабль. Аналогич— но, строки, в которых он находится, восстанавливаются по по— казаниям детекторов из среднего столбца.

Рассмотрим теперь произвольную расстановку *k* детекто— ров, удовлетворяющих требованиям. Рассмотрим два положе— ния корабля, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1. По— казания какого—то детектора для них будут различаться, толь— ко если этот детектор лежит в самом левом столбце левого ко— рабля или в самом правом столбце правого. Значит, в любых двух вертикальных прямоугольниках 1500 х 1, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Аналогично, в любых двух горизонтальных прямоугольниках

) Х Й()(), ОТЛИЧ іlЮЩИХСЯ Be]ЭTИKIIЛЬHЫM СДВИГОf\1 HE ) Й()() , ECТЬ

хотя бы один детектор. Назовём такие пары прямоугольников

*вертигалънъtми п горизонталънъtми,* соответственно.

Выделим все вертикальные пары, лежащие в нижних 1500 и в верхних 1500 строках доски (таких пар 2 515 1030). Ана— логично, выделим все 1030 горизонтальных пар, лежащих в ле— вых 1500 и в правых 1500 столбцах. Разобьём доску на 9 пря— моугольных областей так, как показано на рис. 3. Выделенные



пары не покрывают клеток из *Е,- квжуья* нe клетка в осталь— ных областях покрыта двумя выделенными парами (в *D н F*

ДВ Ј\4Я ВН]ЭТИК tЛЬНЫМИ, В *М* — ДВ МЯ ГО]ЭИЗОНТі ЛЬНЫМИ, i В

*обльсхях А, С, G п —I орпой* горизонтальной и одной верти—

кальной). Итак, каждый детектор лежит не более, чем в двух выделенных парах; значит, чтобы в каждой выделенной паре был хотя бы один детектор, требуется не менее 2 1030/2 = 1030 детекторов.

Замечание. Существует много других примеров расположения 1030 детекторов, удовлетворяющих требо—

# 1500



Комментариіі. Нргіведёи гіри— мер расстановки 1030 ретекторов, удо- влетворяіощей требовангіям— 1 6aлл.

# Доказано только, что *k р/* 1030 1500

# 5 баллов. Рис. 5

Еслгі гіри в целом верном рассутдении в гіорсчёте колгі- чества детекторов в гіримере гілгі оценке coвepiueria одгіа гілгі несколько оіигібок на едингіцу (нагіргімер, счгітается, что число аыреленных вертикальных пар в нижних строках равно 516, а не 515) снгімается 1 бал.