XLJJ *Всероссийская* математическая олиатпиада школьников



10 класс

## Даны квадратные трёхчлены ii (=) /z(=) /ioo(=) с одинако—

выми коэффициентами при т2 , одинаковыми коэффициентами

при т, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена **/;(т)** выбрали один ко— рень и обозначили его через т;. Какие значения может прини—

Ответ. Только 0.

Решение. Нусть *i—й* трёхчлен имеет вид **/;(т)** — пт 2 +hт+c;.

ТОгДа

поскольк ii (» і ) — 0. Аналогично получаем равенства lз(=z) —

' СЗ C2 - - - › 3100( 99) ' C100 С99 31( 100) ' CJ — C1 0-0

Складывая полученные равенства, получаем

/2(\*i) + /з(=z) + + h(\*too) — (cz — ci) + + (c1 — cioo) — о

Значит, единственное возможное значение суммы— ноль.

Комментариіі. Верныіі ответ без обоснований— 0 баллов.

* 1. Нетя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каж— poe записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют) . Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего красного всех синих чисел оканчиваться на 201fi? i9. *Дмитриев, Р. Женодаров)*

Ответ. Нет, не может.

Решение. Нредположихі противное. Ѕаметим, что число, оканчивающееся на 2016, обязательно делится на 16.

Срери десяти петиных чисел есть либо одно, либо два чис— ла, делящихся на 8. В первокі случае одно из полученных наи— меньших общих кратных (HOK) ,qелится на 8, а второе нет, и потому их сукіма не делится даже на 8. Во втором же случае разность двух петиных чисел, ,целящихся на 8, равна 8, поэтому

одно из них делится на lfi, а друго—е нет. Следовательно, одно

из HOK qелится на 16, а ,qpyroe— нет. Значит, и в этом случае

сумма HOK делиться на 16 не может.

Комментариіі. Только отве—т 0 баллов.

*PeroooanrIiL•Ikl o+a11, 2015—2016 yve6nri!i rog. Mepisriii ,gear*



Paoo6paH +Ouaxo cuyuaii, KOFQH Ha 8 penri+cs pOBriO opuo uriC—

## no rio qeco+r—i 3 6anna.

* 1. Ha C+opoHe *AB* anmyxuoro ue+nipexyrounHHKA *AB ID* B3H+aI **TO'I-** xri N ri (+ouxa N means Mempy *A u L) , 0* Ha C+opoHe *CD* aoo+ni +ouxri *M u N (xovno M* Mempy U ri N) . HuBec+HO, zoo *AK —— CN —— DN u BL —— BC —— CM.* OKHWri+e, zoo ecnri *B C N K—* ariHCiIHHL.in ue+aipexyronaHHK, TO ri *ADML* more Brrii-

cart. T. 3umouoa, //. *Kooiceauuuoa)*

Peiueiiiie. B cnyuae *AB ID* rixieexi *BE — KN,* rioo+oxiy

 *LMDA* no—

nyuae+co rim *B AND* iiapaueunHhiM riepeHocOM Ha Bex+op 

# *A*

Plc 2

Hyc+a +enepn *AB o C D* He riapauueunHhl; O6OOHHUiiv repea fi +ouxy riepeceueHris rips ihIX *AB n CD. Wau* KaK ue+nip xyronn—

HHK *B ONE* Brruca , +peyrounHHKH *PB C u PNK* nono6Hnl; O+-

### *PB PB PN PN*

*BL BG NK N D“*

Hh'iuT, *BN LD (cxi.* pric. 2) .

AHHNOEH'iHO, UK *MA. Oxcmpo* nonyuaeM *Z ALD — Z KBN u*

### *SKIN —— Z AMD.*

Tax xax ue+nip xyronnHHK *B AND* BHHCIIH, TO *Z ABN*

= *EKCN.* HODTOMy H *Z ALD —— Z AMD, no* ecus *ADML xon-*

we Briricari.

Haivieuaiiiie. Ecus u ppyrue peiueHiiH; Harrpu Sep, no paae c+B

*Z AKN —— Z NCB u Z DNS —— ZCB C* cnepye+, zoo went.i—

})HXyFONhHHKri *B CML u NKAD* nopo6Hnl, HOo+o iy *Z BLM*

# *—— MMD A.*



Комментарий. Доказагіо, что *BN LD (плн ЛИ МА,*

гілгі обе этп параллельности) 3 балла.

## Верное доказательство поqобия четырехугольнгіков *BCLM п NИAD—* не менее 3 баллов.

ha рассмотренгіе частгіого случая, скажем *AB CD* 0 бал-

Еслгі гіреръявлено верное решенгіе, формально не работаю- щее в случае *AB CD* балы ue снимаіотся.

* 1. Дана кетчатая таблица 100 х 100, клетки котороіі покрашены а чёрныіі п белыіі цвета. Hpu это ы во всех столбцах гіоровну чёрнlх клеток, в то время как во всех строках разнlе колгіче— ства чёрных клеток. Каково максихтальное возможное колгіче- ство riap cocepririx по стороне разноцветньх клеток? (//. fioshonoa)

## Отает. 6 - 502 — 5 50 + 1 = 14 751 riap.

Реіііенгіе. Обозгіачим длину стороны таблгіцl через 2п

— 100 (так что п 50) u прогіумеруем строки сверху внггз, а столбць— слева направо чгіслами от 1 go 2п.

В кampoii строке может быть от 0 go 2s чёрных клеток. Так как колгічества чёрных клеток во всех строках разлгічнl, эти колгічества все числа от 0 go 2п, кроме одного (скажем,

## кроме *k).* Torqa общее чгісло чёрных клеток равно (0 + 1 + . . . +

+ 2s) — *k 232 п — k. С* другой сторонl, так как во всех

столбцах кеток гіоровну, общее число чёрных кеток ролтно релгіться на 2п. Значгіт, *k —— п, п* во всех столбцах по 232 /(2п)

## = п чёрных клеток.

Оценгім тегіерь сверху количество пар сосернгіх по cтopoue разноцаетных клеток, считая отдельно пары кеток, cocepririx по горгізогіталгі и по вертгікалгі.

Еслгі в строке i п — 1 чёргіых клеток, то онгі іогут участ- вовать rie более, чем в 2/ горгізонтальных riapax. Еслгі в строке i п + 1 чёрных клеток, аналогичное paccympeнrie можно npu- менггть к белым кеткам, когіх 2s — ї р+ п — 1. Нтого, горизон-

## тальных разноцветнlх пар не больше, чеы 2 (2 0 + -2

+ 2 ( — 1)) — 2 ( — 1).

## 1 + . . . +

Оценгім тегіерь колгічество вертгікальньх riap. Рассхіотргім любую строку с чётным номером от 2 go 2(п 1); гіусть а неіі i чёрнlх кеток. Torqa либо в строке сверху, лгібо в строке снгі—

10

*РегнонапънL•ІЄЇ э+a11, 2015—2016 учебнъіїі гоg. Mepisыïi ,qenь*



my o+ see uricno ueprinix xue+ox He paBHO 100 — ; 3Hi1'irIT, OQ-

Hit rim Bep+rixahHaix nBap, KOTOpt.ix yuac+ByIO+ xne+xri Hasten

c+poxu, 6ype+ opHoiiBe+HoM. H+oro, ecus xo+o 6nI n — 1 OnHouae+-

Haix Bep+rixaNhHaix nap. TaK KaK o6iuee uricno Bep+rixaaHhIX nap

})HBHO 2s(2s 1), +o paurioyBe+Hnix its Hiix He 6onaiiie, men 2s(2s — 1) — (u — 1). H+oro, o6iuee micro pasiiouBe+Haix nap He больше, чехі 2п(п — 1) (43 2 — Зп 1) = 63 2 — 5п 1 = 14751.

Осталось приВести пример, в котором указанное число пар достигается. HpoBe— д@М В нашей таблиие 2n х 2s диагональ ггз Верхнего леВого yrлil В ННМний rI HBhIiИ Все кетхи, лежащгіе на иNH Hrime пиаго-

HftNri, noxpaCilM В чёрНый uBeт, если онгі

лежат а чеТНых строхах, п В белый— HHH- Рис 3

че (pacкpaCKd «по строкаМ›> ) . Все КлетКи,

лежащие Выше пиагонали, покраСиМ В чёрНыіі цвет, если С MMiI HoMepoB иХ строки и стОлбlЈа ч THIS, и В белL.іі1 ННаче ( ‹шаххіат— Hftя» раскраска) . НриМер таКОіі раСКраски при п = 4 НОКІІзан На рис. 3. НетрудНО проверить, чтО В Кажпом стОлбие poBHO по п чёрНых клеток, В 2(—ii строКе есть п i чёрных КлетоК, а В (2i 1)—й строке п — i чёрных клеток. Кроме тогО, Все оиенки BL.iшe достигаются.

Комментариіі. ТОлько отВе—т 0 бdЛЛОВ.

Только отВет и Верныіі приМер— 2 балла.

Только показательстВО тО'4НОй оцеНки— 4 бала.

ОКftзательстВО TO'1HOii оііеНКи TONL.KO На количестВо Верти— к£(hHhIX Нли толькО На количество горизонтальных разНоиВет— HhIX HftД 2 6dNлa (ліогут CKNaдL.IBIITL.Cя с баллІlМН ha п dBHHh— Hhlii приzіер) .

ОКНЗіІНО, чтО В Тіlблице Нет строки, сопержаіией рОВнО 50 чёрНых клетоК— СТіlВится 1 бНлл, если В работе нет других суіиественных прО,qВижеНиіі (ННаче этот балл Не побавляется) .