Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

8 класс

1. Садовник хочет посадить шесть кустов крыжовника, чтобы на расстоянии 2м от каждого из них росло ровно три куста крыжовника. Сможет ли он это сделать?

*Ответ:* Да. Например, если на двух сторонах квадрата ABCD построить правильные треугольники AEB и DCF, то для каждой точки условия будут выполняться, так как DE=EC<DC, AF=FB>AB и АD=ЕF(стороны параллелограмма).

*Kpuтepuu:*

Есть верный пример без обоснования равенства/неравенства сторон — 4 балла;

Есть верный пример с полным обоснованием — 7 баллов; Только ответ — 0 баллов

1. В выражении  замените каждую из букв на какую-то из цифр от 1 до 9 (одинаковые буквы — на одинаковые цифры, разные буквы — на разные цифры) так, чтобы значение выражения получилось наибольшим. *Покажите, как нужно расставить цифры, вычислите значение вашего выражения и объясните, почему оно наибольшее.*

*Решение:* Сократим множители T,M,A. Тогда выражение примет вид 1 -1- И-К А

Е

Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем знаменателе и наибольшем числителе. Следовательно E=1, а числа И,К,А равны цифрам 9,8,7. Числа M,A,T могут быть произвольными.

*Ответ:* 505

*Kpuтepuu:*

Есть только пример с верным ответом — 7 баллов. Есть только пример — 4 балла.

1. В волшебном королевстве обитают лисицы с семью и девятью хвостами. Те, у кого 7 хвостов, всегда врут, а те, у кого 9 хвостов, всегда говорят правду. Однажды три лисицы завели между собой разговор.

Рыжая лиса: «у нас вместе 27 хвостов». Серая лиса: «это действительно так!»

Белая лиса: «глупости, Рыжая говорит чепуху!»

Сколько хвостов было у каждой лисицы? (Ответ обоснуйте.)

*Решение:* Если бы Рыжая говорила правду, то у всех трёх было бы по 9 хвостов. Но тогда и Белая говорила бы правду, а это неверно. Тогда Рыжая лжет, и Серая соответственно тоже. Тогда Белая говорит правду.

*Ответ: У* Рыжей было 7 хвостов, у Серой — 7, у Белой — 9.

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений — 1 балл; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

1. Мальчик Марат может за минуту подняться с первого этажа на пятый этаж, а девочка Даша за то же время успевает добежать только до четвертого. Даша спускается вдвое быстрее, чем поднимается, а Марат спускается с той же скоростью, что и Даша. Дети решили посоревноваться и добежать с первого этажа до 25, стартуя одновременно. Марат, достигнув 25 этажа, начал спускаться, чтобы встретить проигравшую Дашу. Сколько пройдёт времени от начала соревнования до момента встречи?

*Решение:* За минуту Марат поднимается на 4 этажа вверх, а Даша — на 3 этажа вверх. За ту же минуту оба могут спуститься на 6 этажей вниз. Для того чтобы победить Марату нужно преодолеть 24 этажа. Через 6 минут Марат достигает финиша, а Даша поднимается только на 18 этажей (до 19). Теперь расстояние между ними 6 этажей, а скорость сближения 3+6=9 этажей в минуту. Чтобы встретиться им понадобится 40 секунд.

*Ответ: 6* минут и 40 секунд

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений — 1 балл; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

1. В треугольнике ABC все стороны равны 2017 см. Точки М, N, Р, К расположены так, как показано на рисунке. Известно, что CK + PC = МА + AN — 2017 см. Найдите величину угла KON.

*Решение:* Заметим, что CK + PC = АР + PC и MA+AN = MA+MC. Тогда CK=AP и AN=MC.

Следовательно, треугольники APN и MKC равны.

cANP=zCMK и c APN+a ANP=120O. Тогда

MPO+ PMO =120O. KON= РОМ =60O.

Ответ: KON =60O

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений — 0 баллов; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

1. Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 — палиндром, а 2017 нет). Представьте число 2017 в виде суммы двух палиндромов.

*Решение:* например, 1331+686=2017.

*Kpuтepuu:*

Наличие любого верного примера — 7 баллов.

1. Айрат и Дина вместе весят 84 кг, Дина и Таня — 76 кг, Таня и Саша — 77 кг, Саша и Маша — 67 кг, Маша и Айрат — 64 кг. Кто тяжелее всех и сколько он весит?

*Решение:* А+Д=84, Д+Т=7б, T+C=77, C+M=67, M+A=64. Сложим все уравнения и получим 2(А+Д+Т+С+М)=Зб8. Тогда А+Д+Т+С+М= 184. Используя второе и четвертое равенство из условия получим A+76+67=184. Следовательно A=41, Д=43, Т=ЗЗ, C=44, M=23.

*Ответ:* Самый тяжелый — Саша. Саша весит 44 кг.

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений, без указания веса — 0 баллов; Только ответ, без объяснений, с указанием веса — 3 балла; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

1. Дамир нарисовал на тетрадном листе квадрат 5 5 и каждую минуту закрашивает по одной клетке. Лёша считает количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток и записывает это число на доске. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел на доске будет равна 40.

Доказательство: Заметим, что Леша считает количество границ

данной клетки, для которых обе соседние клетки закрашены. Выполняя свои операции, Леша каждую границу считает один и только один раз. Тогда, сумма всех чисел равна количеству граничных отрезков, а именно 2\*4\*5=40.

1. Найдите площадь закрашенной части параллелограмма, если площадь большого параллелограмма равна 40 (вершины всех параллелограммов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?

*Решение:* В параллелограмме ABCD проведем отрезки EG и FH. Они параллельны боковым сторонам. Тогда образуются 4 меньших параллелограмма. В каждом из них диагональ делит параллелограмм на две равные части. Следовательно, суммарная

площадь «угловых» треугольников AEH, EBF, FCG, GDH равна площади параллелограмма EFGH.

В задаче дано, что все четырехугольники — параллелограммы. *Это доказывать не обязательно!* Тогда ПЛОЩіlДЬ II ГЛОВЫХІІ Т]Зe ГОЛЬНИКОВ

самого большого параллелограмма равна

20. У второго — 10, у третьего — 5. Вычтем из площади всего параллелограмма площади «угловых» треугольников первого и третьего параллелограммов. 40-20- 5=25.

*Ответ:* 25.

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений — 1 балл; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

5. Вместо пропусков вставьте такие числа, чтобы выражение

$x 2 —F х —F 6)(х —F 4) = (х + )(x i + х + 8) стало тождеством.

*Решение:* Пусть пропущены числа п, *b, с.*

(xi -l— п х -l— 6)(х -l— 4) = (х + b)(xi + *-с х +* 8). Подставим х = 0 в уравнение.

Получим 24 = 8b, *b ——* 3. Подставим х = —4. Получим

0 = (—4 —F 3)(16 + *с* (—4) —F 8). Тогда с = 6. Подставим х = —3. Получим

(9 — 3 п —F 6) (—3 —F 4) = 0. Тогда п = 5.

*Ответ:* (xi + 5 х —F 6) (х —F 4) = (х —F 3)(xi —F 6 х —F 8).

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений — 4 балла; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

# класс

1. Делится ли 7' 017+ 7' 018+ 7' 0 9 на 19?

*Решенue:* 72017 + 72018 + 72019 = 72017 (1 —b 7 —b 49) = 72017 3 19.

*Ответ:* Да.

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений — 0 баллов;

Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

1. В прямоугольнике ABCD на стороне CD отметили середину М, и на стороне AD — середину N. Отрезки CN и АМ пересекаются в точке К. Во сколько раз площадь четырехугольника AKCB больше площади четырехугольника MDNK?

*Решение:* ED медиана треугольника ACD. Известно, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих. Тогда площади

треугольников AEK, CEK, CMK, DMK, DKN, ANK равны. А площадь треугольника

ACD равна площади ABC. Тогда отношение *sABCK* 6+2 4.

*S KMD* 2

*Ответ:* в 4 раза.

*Kpuтepuu:*

Только ответ, без объяснений — 1 балл; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

1. Постройте график функции у = ( х —F 1)2 -1- .

*Решение:* Приведем к виду 

2x -l— 1 при х й 0

Преобразуем

при х < 0. Тогда график примет вид х й —1



*Kpuтepuu:*

Только верный график, без объяснений — 4 балла; Решение с полным обоснованием — 7 баллов.

1. В деревне хоббитов каждый либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Волшебник пригласил к себе нескольких хоббитов и спросил каждого из них про каждого из остальных, «правдолюб» тот или «лжец». Bceгo было получено 54 ответа

«правдолюб» и 56 ответов «лжец». Сколько раз волшебник мог услышать правду?

*Решение:* Если приглашено п хоббитов, то дано п(п — 1) = 54 + 56 = 110 ответов, откуда п = 11. Пусть из этих 11 хоббитов t правдолюбов и (11 t) лжецов.

Ответ «лжец» может дать только лжец про правдолюба и правдолюб про лжеца, таких фраз было 2t(11 t) = 56, откуда t = 4 или t = 7. Если правдолюбов четверо, то они дали 4- 10 = 40 правдивых ответов. Если правдолюбов семеро, то они дали 7- 10= 70 правдивых ответов.

Комментарий. Обратите внимание на то, что из условия следует, что правдивыми являются половина из ответов «лжец». Но сразу не ясно, какова доля правдивых ответов «правдолюб».

*Kpuтepuu:*

* Полное решение — 7 баллов.
* Правильно найдены оба случая (сколько правдивцев и лжецов), но неверно подсчитано число правдивых ответов — 4 балла.
* Возможны 2 ситуации, описанные в задаче. Если верно разобрана только одна, то ставить 3 балла.
* Приведены оба ответа без объяснения — 1 балл.
* Приведен только один из ответов — 0 баллов.

*Ответ:* 40 или 70

1. У торговца драгоценностями есть 61 гиря весом lг, 2г, . .. , 61г. Он выставил их в ряд так, чтобы вес каждой, начиная со второй, является делителем суммы весов всех предшествующих гирь. Первая гиря весит 61г, вторая — lr. Найдите вес третьей гири.

*Ответ.* 2.

*Решение.* Сумма всех чисел, кроме последнего, делится на последнее число, значит, сумма всех чисел также делится на последнее число. Сумма всех чисел от 1 до 61 равна 31- 61. Значит, последнее число равно 1, 31 или 61. Так как 1 и 61 стоят на первом и втором местах, последнее число — 31. Третье число делитель числа 61 + 1 = 62, то есть оно равно 1, 2 или 31. Мы знаем, что числа 1 и 31 расположены не на третьем месте, поэтому на третьем месте стоит число 2. Замечание. Приводить пример, как расположены числа на остальных карточках (или доказывать его существование), не требуется.

*Kpuтepuu:*

* Полное верное решение — 7 баллов.
* Утверждается, что на третьей карточке — число 2 или число 19, но других продвижений нет — 1 балл.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

# класс

1. Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел а и b, больших 1,

удовлетворяющих уравнению а' З ЬЗ ' = 6' 017

*Решение.* Достаточно привести один пример.

Так как 2017 = 148 13 —F 3 31, подходят а = 6' 48 *b ——* 63 .

*Комментарий:* возможно множество различных ответов со всевозможными комбинациями степеней двоек и троек.

*Kpuтepuu:*

* Приведена хотя бы одна пара значений а, b и показано, что она удовлетворяет данному условию — 7 баллов.
* Приведена пара чисел, более ничего не обосновано (а жюри умеет показывать, что пара подходит) — 5 баллов.
* Основная идея решения верна, но допущена арифметическая ошибка (например, написано, что 2017 = 148 13 —F 3- 33) — 2 балла.
1. Имеет ли уравнение cos2015x —F tд20l6x — sin2017x = 0 хотя бы один корень? Ответ обоснуйте.

*Ответ:* Например,4

*Решение: cos* 20153 + t

4

20163

4

s п 30 “ + о — “ о

4 2 2

*Kpuтepuu:*

* Приведён верный ответ, и показано, что при этом значении х равенство верно, — 7 баллов.
* Приведён только верный ответ — 3 балла.
1. Дан куб. А, В и С — середины его рёбер (см. рисунок). Чему равен косинус угла

ABC ? 

*Решение:* Не умаляя общности примем сторону куба за 2. Тогда *AC ——* 2, *AB ——*

 Вычислим по трем сторонам косинус угла ABC. *cosa*

*Kpuтepuu:*

* Получен верный ответ со всеми обоснованиями — 7 баллов.
* Ход решения правильный, но ответ неверен из-за арифметической ошибки — 5 баллов.
* Получен ответ —5 — 4 балла.

6

* Только ответ (в том числе — верный) — 0 баллов.

*Ответ:* 5*—*

6

1. На координатной плоскости (х, у) изобразите множество всех точек, для которых у' + у = х' + х.

*Решение:* уф —l— 2 + 2 32 + — у = 0 (х — у) (х —F у —F 1) = 0.

*Kpuтepuu:*

Построен верный график со всеми обоснованиями — 7 баллов. Построен верный график без обоснований — 3 балла.

1. В пенале у Равиля 9 карандашей. Он заметил, что среди любых четырёх карандашей хотя бы два одного цвета. А среди любых пяти карандашей не больше трёх имеют один цвет. Карандаши скольких различных цветов есть у Равиля, и сколько карандашей каждого цвета?

*Ответ.* Три цвета по три карандаша.

*Решение.* Ни одного цвета не более трех, так как в противном случае условие

«среди любых пяти карандашей не больше трёх имеют один цвет» было бы не выполнено. Bceгo карандашей 9, поэтому цветов не менее трех. С другой стороны среди любых четырёх карандашей хотя бы два одного цвета, поэтому цветов меньше четырех. Таким образом, цветов карандашей три, причем каждого не более трех штук, а всего карандашей 9. Значит,

каждого цвета по 3.

*Kpuтepuu:*

* Полный ответ с верным объяснением — 7 баллов.
* Обосновано, что детей трое — 5 баллов.
* Верные соображения, но решение не доведено до конца — 1-2 балла.
* Ответ без обоснования — 0 баллов.